§. Cap. 12: Cubiche piane proiettive $[\mathbb{K}=\mathbb{C}]$

§12.1 CLASSIFICAZIONE (a meno di proiettività)

§12.2 LEGGE DI GRUPPO ABELIANO

$\boxed{\text{DEF}}$ $Z_P(F) \sim Z_P(\tilde{F})$ PROIETTIVAM. EQUIVALENTI

$\iff \exists T: \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ PROIETTIVITÀ, $T=[A]$ $\exists A \in GL_3(\mathbb{C})$, $T(x)=[A.x]$ tale che

$$Z_P(\tilde{F}) = T(Z_P(F)) \wedge \tilde{F}(x_0,x_1,x_2) = F\left(A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)$$

Esercizio: verificare relaz. equivalenza.

Q: Quali quantità sono **INVARIANTI** per **PROIETTIVITÀ**?

$\boxed{\textbf{PROP}}$ $T = [A]$ proiettività, $Z_P(L) = r \not\subseteq Z_P(F)$ (retta di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$)

e siano $\tilde{r} := T(r) =: Z_P(\tilde{L})$ (ridotto), $Z_P(\tilde{F}) := T(Z_P(F))$ (ridotto)

Allora $\forall Q \in Z_P(F) \cap r$ si ha che:

$$I_{T(Q)}(\tilde{F}, \tilde{L}) = I_Q(F, L)$$

In altre parole:

LE MOLTEPLICITÀ di INTERSEZIONE sono INVARIANTI per PROIETTIVITÀ

Dim.: per esercizio.

Problema: **CLASSIFICARE CUBICHE PROIETTIVE PIANE A MENO DI PROIETTIVITÀ**

OSS $d=3 \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \binom{m_i}{2} \leq \binom{d-1}{2} = \binom{2}{2} = 1 \Rightarrow s \leq 1 \wedge m_1 \leq 2$ ovvero:

① CUBICHE LISCE $\Leftrightarrow g=1$

② CUBICHE SINGOLARI $\Leftrightarrow g=0 \Leftrightarrow$ UNICO PUNTO SINGOLARE di $m_1=2$.

Questo punto singolare può avere le sue due tangenti:

(2.1.) distinte $\Leftrightarrow$ NODO ORDINARIO

(2.2.) coincidenti $\Leftrightarrow$ CUSPIDE ORDINARIA

OSS Chiaramente ognuno di questi casi o di sottocasi è in una classe di proiettività distinta.
La domanda ora è per ognuno di questi casi quante classi di proiettività distinte ci sono.

La risposta è data per le cubiche singolari dal seguente teorema.

(THM) [CLASSIFICAZIONE CUBICHE IRRID. SINGOLARI]

1. Ogni $Z_P(F)$ **NODATA** è proiettivamente equivalente a

$$C_{nodata}: x_1^3 + x_2^3 + x_0 x_1 x_2 = 0$$

QUINDI TUTTE LE NODATE SONO PROJ. EQUIVALENTI!

2. Ogni $Z_P(F)$ **CUSPIDATA** è proiettivamente equivalente a

$$C_{cuspidata}: x_1^3 + x_0 x_2^2 = 0$$

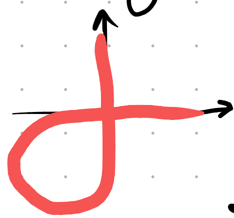
QUINDI TUTTE LE CUSPIDATE SONO PROJ. EQUIVALENTI!

In aggiunta, ogni nodata ha **3** flessi allineati, ogni cuspidata ha **1** punto di flesso.

Proof: 1. A meno di proiettività possiamo assumere che il nodo Q abbia coordinate $Q=(1:0:0)$ e siano le tangenti distinte r_1 ed r_2 mandate dalla proiettività sugli assi di x_1 e x_2 rispettivamente. Allora nell'aperto affine $U_0 \cong \mathbb{A}^2$ abbiamo $Q=(0,0)$ e l'equazione

I TERMINI MANCANTI RISPECCHIANO $F(Q)=0$ & TANGENTI

$$aF: xy + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$$



L'ipotesi di IRRIDUCIBILITÀ di $Z_p(F)$ forza $\mathbf{a, d \neq 0}$.
Omogeneizzando si trova:

$$\mathbf{F}: x_0 x_1 x_2 + a x_1^3 + b x_1^2 x_2 + c x_1 x_2^2 + d x_2^3 = 0$$

Siamo liberi di comporre più proiettività, perciò la loro composizione rimane una proiettività. Per disfarsi degli ultimi coefficienti è sufficiente considerare

$$T_2 = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt[3]{1/d} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{1/a} & 0 \\ -c \cdot \sqrt[3]{1/d} & -b\sqrt[3]{1/a} & \sqrt[3]{ad} \end{pmatrix}}_{=:A} \right] \longleftrightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt[3]{1/d} \cdot y_0 \\ x_1 = \sqrt[3]{1/a} \cdot y_1 \\ x_2 = -c\sqrt[3]{1/d} \cdot y_0 - b\sqrt[3]{1/a}\, y_1 + \sqrt[3]{ad} \cdot y_2 \end{cases}$$

chiaramente invertibile

Il numero di flessi e il fatto che siano allineati è preservato dalle proiettività perché le proiettività preservano molteplicità di intersezione e singolarità / lisciezze di punti.
Perciò basta lavorare con il rappresentante canonico scelto

La matrice Hessiana è:

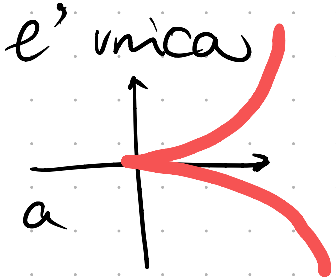
$$M_{F_{\text{canonica nodale}}} = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 6x_1 & x_0 \\ x_1 & x_0 & 6x_2 \end{pmatrix}$$

e calcolando il suo determinante si trova che i flessi sono:

$$(0 : e^{ik\pi/3} : 1) \qquad k = 1,3,5$$

in particolare sono TRE e sono ALLINEATI.

② Come prima wlog assumiamo che a meno di proiettività la cuspide Q abbia coordinate $Q = (1:0:0)$ e l'unica sua tangente doppia coincide con l'asse x_1 allora su $U_0 \cong \mathbb{A}^2$ abbiamo semplificato l'equazione a



$$aF : y^2 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$$

Di nuovo applichiamo l'ipotesi $Z_P(F)$ IRRID.: $a \neq 0$

Omogeneizz.:

$$F : x_0 x_2^2 + a x_1^3 + b x_1^2 x_2 + c x_1 x_2^2 + d x_2^3 = 0$$

Ora componiamo altre DUE proiettività

$$T_2^{-1} := \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_1 = y_1 - \frac{b}{3a} y_0 \\ x_2 = y_2 + \left(\frac{b^2}{3a} - c\right) y_1 \end{cases} \qquad T_3^{-1} := \begin{cases} y_0 = z_0 \\ y_1 = -\sqrt[3]{1/a} \cdot z_1 \\ y_2 = z_2 - \delta \cdot z_0 \end{cases}$$

$[y_0^3] \cdot T_2(F)$

Il risultato è $z_0 z_2^2 + z_1^3 = 0$. Si trovi il flesso per esercizio.

$\square$