

Esempio svolto

Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 4x^2 + 4z^2 \leq 1\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi l'area della superficie.

1. Interpretazione e parametrizzazione

La superficie è il grafico della funzione

$$y = f(x, z) = 4(x^2 + z^2)$$

limitata dalla condizione $y \leq 1$, cioè dai punti (x, z) tali che

$$4(x^2 + z^2) \leq 1 \iff x^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Usiamo coordinate polari per i parametri:

$$x = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta,$$

con

$$0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Quindi prendiamo come parametrizzazione rettangolare (in variabili polari)

$$\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, 4r^2, r \sin \theta), \quad (r, \theta) \in I = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi].$$

2. Calcolo dell'elemento di superficie

Calcoliamo le derivate parziali:

$$\sigma_r = (\cos \theta, 8r, \sin \theta), \quad \sigma_\theta = (-r \sin \theta, 0, r \cos \theta).$$

Il prodotto vettoriale vale

$$\sigma_r \times \sigma_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & 8r & \sin \theta \\ -r \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{vmatrix} = (8r^2 \cos \theta, -r, 8r^2 \sin \theta).$$

La norma è

$$\|\sigma_r \times \sigma_\theta\| = \sqrt{(8r^2 \cos \theta)^2 + (-r)^2 + (8r^2 \sin \theta)^2} = \sqrt{64r^4(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + r^2} = r\sqrt{64r^2 + 1}.$$

Quindi l'elemento di area è

$$dS = r\sqrt{64r^2 + 1} \, dr \, d\theta.$$

3. Calcolo dell'area

L'area della superficie $\mathcal{M}$ è

$$\text{Area}(\mathcal{M}) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1/2} r\sqrt{64r^2 + 1} \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^{1/2} r\sqrt{64r^2 + 1} \, dr.$$

Effettuiamo la sostituzione $u = 64r^2 + 1$, $du = 128r \, dr$, per cui $r \, dr = \frac{du}{128}$. Quando $r = 0$ abbiamo $u = 1$, quando $r = \frac{1}{2}$ abbiamo $u = 64 \cdot \frac{1}{4} + 1 = 17$. Quindi

$$\int_0^{1/2} r\sqrt{64r^2 + 1} \, dr = \int_{u=1}^{17} \frac{\sqrt{u}}{128} \, du = \frac{1}{128} \cdot \frac{2}{3} [u^{3/2}]_1^{17} = \frac{1}{192} (17^{3/2} - 1).$$

Moltiplicando per 2π otteniamo l'area cercata:

$$\text{Area}(\mathcal{M}) = \frac{\pi}{96} (17^{3/2} - 1) = \frac{\pi}{96} (17\sqrt{17} - 1).$$

Esercizi simili (tutti risolvibili analiticamente) con soluzioni

Gli esercizi proposti sono varianti di grafici di funzioni radiali del tipo $y = a(x^2 + z^2)$ o superfici cilindriche/planari in cui il calcolo dell'elemento di area porta a integrali elementari risolvibili con sostituzioni elementari.

Esercizio A. Sia

$$\mathcal{M}_A = \{(x, y, z) : y = 9(x^2 + z^2) \leq 4\}.$$

Trovare una parametrizzazione su un rettangolo e calcolare l'area.

Soluzione. La regione di proiezione è $x^2 + z^2 \leq 4/9$, quindi in coordinate polari $0 \leq r \leq 2/3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Parametizziamo

$$\sigma_A(r, \theta) = (r \cos \theta, 9r^2, r \sin \theta).$$

I calcoli sono analoghi all'esempio: si trova

$$\|\sigma_r \times \sigma_\theta\| = r\sqrt{(36r)^2 + 1} = r\sqrt{1296r^2 + 1}.$$

L'area è

$$\text{Area}(\mathcal{M}_A) = 2\pi \int_0^{2/3} r\sqrt{1296r^2 + 1} \, dr.$$

Con $u = 1296r^2 + 1$, $du = 2592r \, dr$, si ottiene

$$\text{Area}(\mathcal{M}_A) = \frac{\pi}{1296} \left((1296(\frac{2}{3})^2 + 1)^{3/2} - 1 \right) = \frac{\pi}{1296} \left((1296 \cdot \frac{4}{9} + 1)^{3/2} - 1 \right).$$

Semplificando $1296 \cdot \frac{4}{9} = 576$, quindi

$$\text{Area}(\mathcal{M}_A) = \frac{\pi}{1296} (577^{3/2} - 1).$$

Esercizio B. Sia

$$\mathcal{M}_B = \{(x, y, z) : y = 2(x^2 + z^2) \leq 2\}.$$

Parametrizzare e calcolare l'area.

Soluzione. La proiezione è $x^2 + z^2 \leq 1$, quindi $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Parametrizzazione

$$\sigma_B(r, \theta) = (r \cos \theta, 2r^2, r \sin \theta).$$

Si trova

$$\|\sigma_r \times \sigma_\theta\| = r\sqrt{(4r)^2 + 1} = r\sqrt{16r^2 + 1},$$

e

$$\text{Area}(\mathcal{M}_B) = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{16r^2 + 1} \, dr.$$

Con $u = 16r^2 + 1$, $du = 32r \, dr$,

$$\text{Area}(\mathcal{M}_B) = \frac{\pi}{16} \left((16 \cdot 1^2 + 1)^{3/2} - 1 \right) = \frac{\pi}{16} (17^{3/2} - 1).$$

Esercizio C. Sia S il grafico $y = 3x^2 + 3z^2$ limitato da $y \leq 3$. Parametrizzare e calcolare l'area.

Soluzione. La proiezione è $x^2 + z^2 \leq 1$, quindi usare $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e

$$\sigma_C(r, \theta) = (r \cos \theta, 3r^2, r \sin \theta).$$

Si ottiene

$$\|\sigma_r \times \sigma_\theta\| = r\sqrt{36r^2 + 1},$$

perciò

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{36r^2 + 1} \, dr = \frac{\pi}{54} ((36 \cdot 1^2 + 1)^{3/2} - 1) = \frac{\pi}{54} (37^{3/2} - 1).$$

Esercizio D. Considera la superficie cilindrica

$$\mathcal{M}_D = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 9, 0 \leq y \leq 5\}.$$

Parametrizza con un rettangolo e calcola l'area laterale.

Soluzione. Parametizziamo con $\theta \in [0, 2\pi]$, $y \in [0, 5]$:

$$\sigma_D(\theta, y) = (3 \cos \theta, y, 3 \sin \theta).$$

Si calcola $\|\sigma_\theta \times \sigma_y\| = 3$, quindi

$$\text{Area}(\mathcal{M}_D) = \int_{y=0}^5 \int_{\theta=0}^{2\pi} 3 \, d\theta \, dy = 3 \cdot 5 \cdot 2\pi = 30\pi.$$

Osservazione finale. Tutti gli esercizi proposti conducono a integrali elementari del tipo

$$\int r\sqrt{1 + Cr^2} \, dr,$$

o a integrali su rettangoli con fattori costanti: entrambi si risolvono analiticamente tramite una sostituzione quadratica o con primitive elementari note. Per gli esercizi A–C le espressioni chiuse sono del tipo

$$\frac{\pi}{k} ((1 + Cr_{\max}^2)^{3/2} - 1),$$

dove i coefficienti C, k sono mostrati nelle soluzioni sopra.