

Esercizi su integrali di superficie con soluzioni (tutte risolvibili analiticamente)

Esercizio 1. Calcolare

$$\iint_S \sqrt{1+3z^2} dS$$

dove S è la superficie parametrizzata da $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u)$ con dominio

$$D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}.$$

Soluzione. Si ha $\mathbf{r}_u = (1, 0, 1)$, $\mathbf{r}_v = (0, 1, 0)$, perciò

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-1, 0, 1), \quad \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \sqrt{2}.$$

Poiché $z = u$, l'integrale diventa

$$\iint_S \sqrt{1+3z^2} dS = \sqrt{2} \int_{v=0}^1 \int_{u=0}^1 \sqrt{1+3u^2} du dv = \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1+3u^2} du.$$

Usando la primitiva

$$\int \sqrt{1+3u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{1+3u^2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arsinh}(\sqrt{3}u) + C,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{1+3z^2} dS &= \sqrt{2} \left[\frac{u}{2} \sqrt{1+3u^2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arsinh}(\sqrt{3}u) \right]_0^1 \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arsinh}(\sqrt{3}) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{\operatorname{arsinh}(\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Esercizio 2. Calcolare

$$\iint_S (1+x^2) dS$$

dove S è il piano $z = 0$ sul rettangolo

$$-1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Soluzione. Per il piano $z = 0$ si ha semplicemente $dS = dx dy$. Allora

$$\iint_S (1+x^2) dS = \int_{y=0}^1 \int_{x=-1}^2 (1+x^2) dx dy = \int_{-1}^2 (1+x^2) dx.$$

Calcolando la primitiva:

$$\int (1+x^2) dx = x + \frac{x^3}{3},$$

quindi

$$\iint_S (1+x^2) dS = \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \left(2 + \frac{8}{3} \right) - \left(-1 - \frac{1}{3} \right) = 6.$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\iint_S \sqrt{4+y^2} dS$$

dove S è la superficie definita implicitamente da $x - y = z$ e parametrizzata da

$$(x, y, z) = (u + v, v, u), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad -2 \leq v \leq 2.$$

Soluzione. Con $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, v, u)$ si ha

$$\mathbf{r}_u = (1, 0, 1), \quad \mathbf{r}_v = (1, 1, 0),$$

perciò

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-1, 1, 1), \quad \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \sqrt{3}.$$

Poiché $y = v$, si ottiene

$$\iint_S \sqrt{4 + y^2} dS = \int_{u=0}^1 \int_{v=-2}^2 \sqrt{4 + v^2} \sqrt{3} dv du = \sqrt{3} \int_{-2}^2 \sqrt{4 + v^2} dv.$$

La primitiva (caso generale $a > 0$) è

$$\int \sqrt{a^2 + v^2} dv = \frac{v}{2} \sqrt{a^2 + v^2} + \frac{a^2}{2} \ln(v + \sqrt{a^2 + v^2}) + C.$$

Con $a = 2$ e sfruttando la parità otteniamo il valore esatto

$$\iint_S \sqrt{4 + y^2} dS = \sqrt{3} (2\sqrt{8} + 4 \ln(2 + \sqrt{8})).$$

Esercizio 4. Calcolare

$$\iint_S (2 + z^2) dS$$

dove S è il cilindro circolare retto $x^2 + z^2 = 4$ compreso tra i piani $y = 0$ e $y = 3$, parametrizzato da

$$(x, y, z) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 3.$$

Soluzione. Con la parametrizzazione si ha $\|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y\| = 2$, dunque $dS = 2 d\theta dy$ e $z = 2 \sin \theta$. Allora

$$\begin{aligned} \iint_S (2 + z^2) dS &= \int_{y=0}^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} (2 + 4 \sin^2 \theta) \cdot 2 d\theta dy \\ &= 2 \cdot 3 \int_0^{2\pi} (2 + 4 \sin^2 \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Poiché $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$, si ha

$$\int_0^{2\pi} (2 + 4 \sin^2 \theta) d\theta = 4\pi + 4\pi = 8\pi,$$

dunque

$$\iint_S (2 + z^2) dS = 2 \cdot 3 \cdot 8\pi = 48\pi.$$

Esercizio 5. Calcolare

$$\iint_S (1 + y^2) dS$$

dove S è il piano inclinato $z = 3x + 2y$ sul dominio triangolare

$$D = \text{conv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 2)\}.$$

Soluzione. Per $z = 3x + 2y$ si ha $z_x = 3$, $z_y = 2$ e quindi $dS = \sqrt{1 + 9 + 4} dx dy = \sqrt{14} dx dy$. Il triangolo si può descrivere con $0 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 1 - \frac{y}{2}$, quindi

$$\iint_S (1 + y^2) dS = \sqrt{14} \int_{y=0}^2 \int_{x=0}^{1-\frac{y}{2}} (1 + y^2) dx dy = \sqrt{14} \int_0^2 (1 + y^2) \left(1 - \frac{y}{2}\right) dy.$$

Svolgendo e integrando si trova

$$\iint_S (1 + y^2) dS = \sqrt{14} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5\sqrt{14}}{3}.$$

Risultati finali (espressioni chiuse):

1. $\iint_S \sqrt{1 + 3z^2} dS = \sqrt{2} \left(1 + \frac{\operatorname{arsinh}(\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\right).$
2. $\iint_S (1 + x^2) dS = 6.$
3. $\iint_S \sqrt{4 + y^2} dS = \sqrt{3} \left(2\sqrt{8} + 4 \ln(2 + \sqrt{8})\right).$
4. $\iint_S (2 + z^2) dS = 48\pi.$
5. $\iint_S (1 + y^2) dS = \frac{5\sqrt{14}}{3}.$