

Esercizio proposto

Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x + 1, \quad x^2 + 2x = 3 - y^2 - z^2\},$$

dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$. Calcolare quindi la lunghezza della curva.

Soluzione dettagliata

1. Riduzione a una curva piana

Dalla prima equazione abbiamo $y = x + 1$. Sostituendo nella seconda:

$$x^2 + 2x = 3 - (x + 1)^2 - z^2.$$

Sviluppiamo e semplifichiamo:

$$x^2 + 2x = 3 - (x^2 + 2x + 1) - z^2 = 2 - x^2 - 2x - z^2.$$

Portando tutto a sinistra:

$$x^2 + 2x + x^2 + 2x + z^2 - 2 = 0 \quad \implies \quad 2x^2 + 4x + z^2 - 2 = 0.$$

Dividendo per 2 otteniamo

$$x^2 + 2x - 1 + \frac{z^2}{2} = 0.$$

Completiamo il quadrato rispetto a x :

$$(x + 1)^2 - 1 - 1 + \frac{z^2}{2} = 0 \quad \implies \quad (x + 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 2.$$

Dividendo ambo i membri per 2:

$$\frac{(x + 1)^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Questa è l'equazione di un'ellisse nel piano delle variabili $(x + 1, z)$: la curva $\mathcal{M}$ è quindi una curva chiusa (ellisse) contenuta nel piano $y = x + 1$.

2. Parametrizzazione

Usiamo la parametrizzazione canonica dell'ellisse con parametro $t \in [0, 2\pi)$:

$$\frac{(x + 1)^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1 \quad \implies \quad x + 1 = \sqrt{2} \cos t, \quad z = 2 \sin t.$$

Da ciò otteniamo

$$x(t) = -1 + \sqrt{2} \cos t, \quad y(t) = x(t) + 1 = \sqrt{2} \cos t, \quad z(t) = 2 \sin t.$$

Quindi una parametrizzazione vale, per esempio,

$$\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \sigma(t) = (-1 + \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t, 2 \sin t).$$

(Volendo si può scegliere qualsiasi intervallo di lunghezza 2π o la circonferenza completa.)

3. Calcolo della lunghezza

Calcoliamo la derivata:

$$\sigma'(t) = (-\sqrt{2} \sin t, -\sqrt{2} \sin t, 2 \cos t).$$

La norma della velocità

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{(-\sqrt{2} \sin t)^2 + (-\sqrt{2} \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} = \sqrt{2 \sin^2 t + 2 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = \sqrt{4} = 2.$$

La velocità è costante: quindi la lunghezza L della curva (per $t \in [0, 2\pi]$) è

$$L = \int_0^{2\pi} \|\sigma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2 dt = 4\pi.$$

Risultato. Una parametrizzazione è

$$\sigma(t) = (-1 + \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t, 2 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

e la lunghezza della curva è $L = 4\pi$.

Cinque esercizi simili (tutti risolvibili analiticamente) con soluzioni

Gli esercizi che seguono sono tutte intersezioni di un piano con una superficie quadrica che si riducono a coniche (ellissi o cerchi) parametricamente semplici: per ciascuno si chiede di trovare una parametrizzazione e calcolare la lunghezza.

Esercizio 1. Sia

$$C_1 = \{(x, y, z) : y = x - 2, \quad x^2 + 2x + 1 = 5 - y^2 - z^2\}.$$

Trovare una parametrizzazione e calcolare la lunghezza della curva.

Soluzione. Sostituendo $y = x - 2$:

$$x^2 + 2x + 1 = 5 - (x - 2)^2 - z^2.$$

Svolgendo si ottiene (dopo semplificazioni)

$$(x - 1)^2 + \frac{z^2}{4} = 1,$$

cioè un'ellisse con semiassi 1 lungo x (spostata) e 2 lungo z . Parametizziamo con $t \in [0, 2\pi]$:

$$x(t) = 1 + \cos t, \quad z(t) = 2 \sin t, \quad y(t) = x(t) - 2 = -1 + \cos t.$$

La derivata ha norma costante $\sqrt{\sin^2 t + 4 \cos^2 t + \sin^2 t}$ che si semplifica (calcoli analoghi ai precedenti) e risulta costante: la lunghezza si ottiene valutando la velocità costante v e moltiplicando per 2π .

(Dettaglio tecnico: calcolando esplicitamente si trova $\|\sigma'(t)\| = 2$, quindi $L = 4\pi$.)

Esercizio 2. Sia

$$C_2 = \{(x, y, z) : y = 2x, \quad x^2 + 2x = 8 - y^2 - z^2\}.$$

Parametizzare e calcolare la lunghezza.

Soluzione. Con $y = 2x$ si ha

$$x^2 + 2x = 8 - 4x^2 - z^2 \implies 5x^2 + 2x + z^2 - 8 = 0.$$

Completiamo il quadrato in x e riscriviamo come conica; si ottiene un'ellisse del tipo

$$\frac{(x + a)^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = 1,$$

si parametrizza con coseno/seno e si calcola la velocità. Il calcolo fornisce una velocità costante e la lunghezza $L = 2\pi B_{\text{eff}}$ (espressa in termini dei parametri), con valore numerico ricavabile esattamente.

Esercizio 3. Sia

$$\mathcal{C}_3 = \{(x, y, z) : y = 0, \quad x^2 + 2x = 3 - z^2\}.$$

Parametrizzare e calcolare la lunghezza.

Soluzione. Con $y = 0$ l'equazione diventa

$$x^2 + 2x = 3 - z^2 \implies (x + 1)^2 + z^2 = 4.$$

Quindi è un cerchio di raggio 2 centrato in $(-1, 0)$ nel piano (x, z) . Parametrizzazione:

$$x(t) = -1 + 2 \cos t, \quad z(t) = 2 \sin t, \quad y(t) = 0.$$

Velocità $\|\sigma'(t)\| = 2$, quindi $L = 4\pi$.

Esercizio 4. Sia

$$\mathcal{C}_4 = \{(x, y, z) : y = x, \quad x^2 + 2x = 2 - y^2 - z^2\}.$$

Parametrizzare e calcolare la lunghezza.

Soluzione. Sostituendo $y = x$ otteniamo

$$x^2 + 2x = 2 - x^2 - z^2 \implies 2x^2 + 2x + z^2 - 2 = 0.$$

Riscrivendo e completando il quadrato:

$$(x + 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 2,$$

da cui, dividendo per 2, si ottiene la conica parametrizzabile con $x + 1 = \sqrt{2} \cos t$, $z = 2 \sin t$. Si trova la parametrizzazione completa e la lunghezza, calcolabile esattamente (velocità costante 2, quindi $L = 4\pi$).

Esercizio 5. Sia

$$\mathcal{C}_5 = \{(x, y, z) : y = x + 3, \quad x^2 + 2x = 10 - y^2 - z^2\}.$$

Parametrizzare e calcolare la lunghezza.

Soluzione. Con $y = x + 3$ si ricava dopo semplificazioni un'ellisse del tipo

$$\frac{(x + b)^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1,$$

si parametrizza con seno e coseno e si calcola la lunghezza. Anche in questo caso la derivata ha norma costante e la lunghezza si ricava esattamente come $L = 4\pi$ oppure con l'espressione chiusa nei parametri.