24 Nov

Esercizio

$$\lim_{x \to 0} \frac{o_1(o_2(x^2))}{x^2} = 0$$

$$\frac{o_1(o_2(x^2))}{o_2(x^2)} \qquad \frac{o_2(x^2)}{x^2}$$

Le o_1 esterno $\lim_{x \to 0} \frac{o_1(x)}{x} = 0$

(1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $0 \leq |x| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{o_1(x)}{x} \right| \leq \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \boxed{|o_1(x)| \leq \varepsilon \, |x|}$

Vogliamo ora verificare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{o_1(o_2(x^2))}{x^2} = 0$$

sicuramente, per $\lim_{x \to 0} o_2(x^2) = 0$

se riscrivo la (1) scegliendo $\varepsilon = 1$

ricavo che $0 \leq |y| < \delta_1 \Rightarrow |o_1(y)| \leq |y|$ $\ast$

e per x sufficientemente vicino a 0 si ha

$0 \leq |o_2(x^2)| < \delta_1$

$\ast$ per $y = o_2(x^2)$

$\Rightarrow |o_1(o_2(x^2))| \leq |o_2(x^2)|$

per x vicino a 0

$$0 \leq \frac{|o_1(o_2(x^2))|}{x^2} \leq \frac{|o_2(x^2)|}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

$\downarrow x \to 0$

0

(somma di Riemann)

Def Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e sia

$$\Delta: \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$$

una decomposizione e per ogni intervallo $[x_{j-1}, x_j]$ consideriamo un punto $x_j^* \in [x_{j-1}, x_j]$. Allora

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\,(x_j - x_{j-1})$$ è una somma di Riemann di f associata alla decomposizione Δ.

Osservazione 1 A differenza delle $S(\Delta)$ e $s(\Delta)$ per la cui definizione si richiedeva che f fosse limitata in $[a,b]$, le tutte somme di Riemann sono ben definite per qualsiasi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Def Una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dice integrabile per Riemann se $\exists\, A\in\mathbb{R}$ t.c. $\forall\,\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0$ t.c. per decomposizioni $|\Delta|<\delta$ e per ogni somma di Riemann di f rispetto a Δ si ha

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)(x_j-x_{j-1})-A\right|<\varepsilon.$$

A è chiamato l'integrale di Riemann di f nell'intervallo $[a,b]$.

Osservazione In linea di principio ci si aspetterebbe che possono esserci funzioni non limitate f in $[a,b]$ che sono integrabili per Riemann in $[a,b]$. Ma si dimostra che le funzioni integrabili per Riemann in $[a,b]$ sono limitate in $[a,b]$.

__Teorema__ Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato e sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
Le seguenti due proposizioni sono equivalenti

1) f è limitata in $[a,b]$ ~~e~~d è integrabile per Darboux in $[a,b]$ con integrale $\int_a^b f(x)\,dx$.

2) f è integrabile per Riemann in $[a,b]$ con integrale di Riemann A.

Se 1) e 2) sono vere, vale

$$A=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ricordiamoci che per il teo fondamentale del calcolo, se $f \in C^0(I)$ e se $x_0 \in I$ allora

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(x) \quad \forall x \in I.$$

<u>Def</u> Una $f : I \to \mathbb{R}$ si dice primitivabile in I se $\exists\ F : I \to \mathbb{R}$ t.c. $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.
F è chiamata primitiva della f in I.

<u>Osservazione</u> Notare che se F è una primitiva di f in I anche $G = F + c$ $c \in \mathbb{R}$ è una primitiva di f in I. Infatti

$$G' = F' + (c)' = F' + 0 = f$$

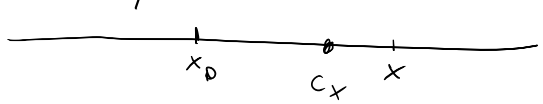
<u>Lemma</u> Se $f : I \to \mathbb{R}$ e se F e G sono due primitive di f in I allora $\exists\ c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$G = F + c.$$

<u>Dim</u> Se pongo $H = G - F$ ho che

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Allora $H(x)$ è una funzione costante e se fisso $x_0 \neq x$ nell'intervallo chiuso J



di estremi x_0, x H è continua e differenziabile e per Lagrange

$$\frac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} = H'(c_x) = 0$$

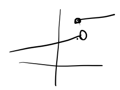
dove $c_x \in \mathring{J} \subseteq I$ $\Rightarrow$ $H(x) = H(x_0)$ $\forall x \in I$.

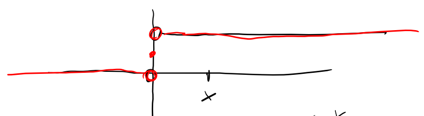
Esempi 1) Se $f \in C^0(I)$ allora è primitivabile in I. Infatti il teorema fond. del calcolo garantisce che, posto $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ si ha $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

2) La funzione di Heviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

non è primitivabile in $\mathbb{R}$.

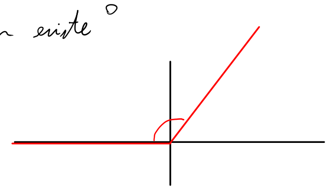




$$F(x) = \int_0^x H(t)\, dt = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$F'_d(0) = 1$, $\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{F'_s(0)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \underbrace{\frac{0-0}{x}}_{=0}$

$F'(0)$ non esiste



$F'(x) = H(x) \quad \forall x \neq 0$ dal Teor fond Calcolo.

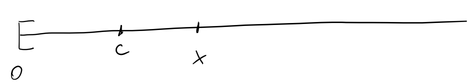
Supponiamo per assurdo che G sia una primitiva di H su $\mathbb{R}$.

$G(x) - F(x)$ è in $C^0(\mathbb{R})$

$G'(x) - F'(x) = H(x) - H(x) = 0 \quad \forall x \neq 0.$

In $[0, +\infty)$ e in $(-\infty, 0]$

$L(x) = G(x) - F(x)$ è costante.



Per Lagrange $\frac{L(x) - L(0)}{x} = L'(c) = 0$ con $0 < c < x \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow L(x) = L(0) \Leftrightarrow G(x) - F(x) = G(0) - F(0) \quad \forall x > 0$

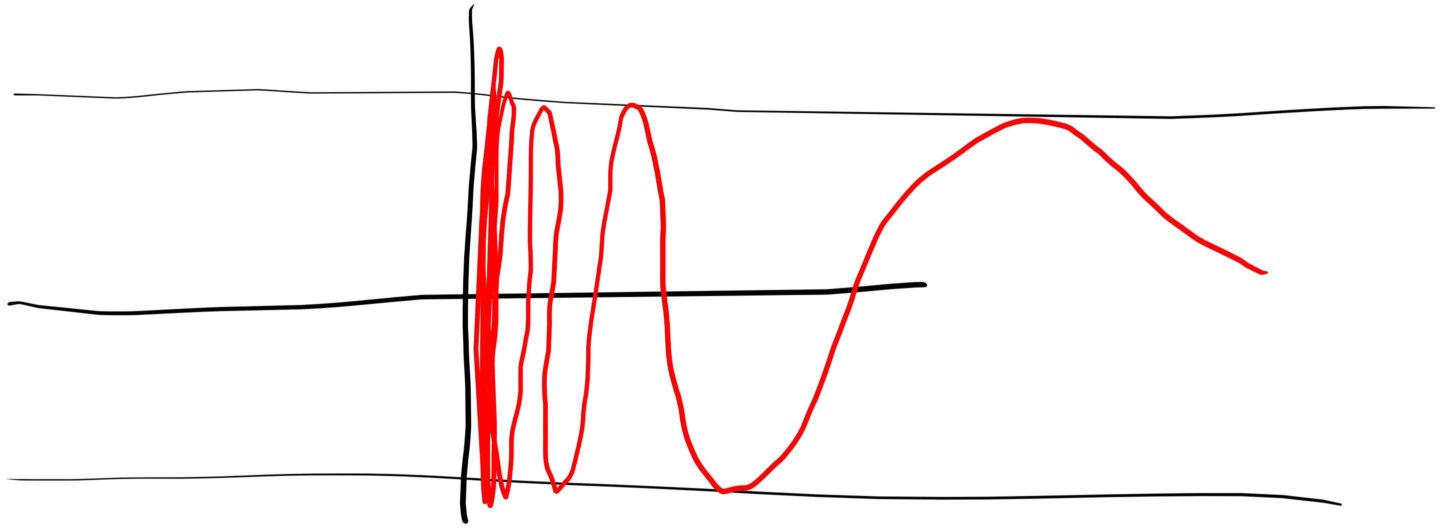
e, analogamente anche per $x < 0$

$\Rightarrow F(x) = G(x) + F(0) - G(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists\, F'(0) = G'(0) = H(0)$

ma questo è assurdo perché supponiamo che $F'(0)$ non esiste.

Esempio



$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è limitata in $\mathbb{R}$.

Corollario (Teorema di Torricelli - Barrow o anche Teorema di Valutazione)

Sia $f \in C^0([a,b])$ e sia G una sua primitiva in $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Dim: Sia $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Dal Teor Fond Calcolo sappiamo che $F'(x) = f(x)$ $\forall x$ in $[a,b] \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $G(x) = F(x) + c$ $\forall x \in [a,b]$.

$F(x) = G(x) - c$

$F(a) = 0$, $\quad F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$

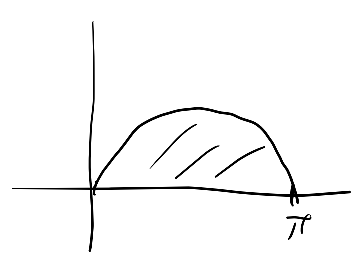
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =$$

$$= (G(b) - \cancel{c}) - (G(a) - \cancel{c})$$

$$= G(b) - G(a)$$

Primitive $\int f(x)\,dx$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$ $\quad \alpha \neq -1$
x^{-1}	$\log\lvert x\rvert + c$
e^{x}	$e^{x}+c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + c$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + c$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th}(x)+c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan(x)+c$



$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos x \Big]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos 0)$$

$$= -\cos(\pi) + \cos(0)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

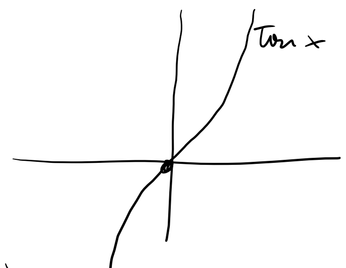
Esercizio Calcolare tutti i polinomi di McLaurin di $\arctan x$.

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

qui $o(y^{2n}) \in C^\infty(\mathbb{R}$

$$\frac{1}{1+y^2} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j y^{2j} + o(y^{2n}) \quad *$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+y^2}\, dy =$$



$$= \int_0^x \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j y^{2j} + o(y^{2n}) \right) dy$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \int_0^x y^{2j}\, dy + \int_0^x o(y^{2n})\, dy$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left. \frac{y^{2j+1}}{2j+1} \right]_0^x + \int_0^x o(y^{2n})\, dy$$

$$\boxed{\arctan x = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}}_{\text{grado} = 2n+1} + \underbrace{\int_0^x o(y^{2n})\, dy}_{o(x^{2n+1})}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x o(y^{2n})\, dy}{x^{2n+1}} = 0 \implies$$ è il polinomio di ordine $2n+1$ di $\arctan x$.

Hopital: $$= \lim_{x \to 0} \frac{o(x^{2n})}{(2n+1)\, x^{2n}} = 0$$

$$P_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x)$$