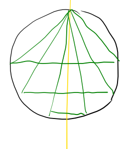
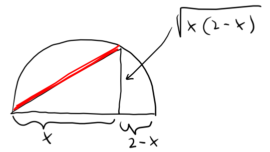
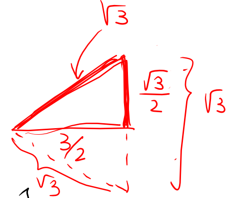
Lezione 32 - 24/11/2025

Es







di tutto il triangolo isoscele $\longrightarrow$ $A(x) = x\sqrt{2x-x^2} = x(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$A'(x) = (2x-x^2)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2-2x}\ 1-x}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$A: [0,2] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto x\sqrt{2x-x^2}$

$$= \frac{2x-x^2 + x(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{3x-2x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$A'(x) = 0$ per $3x - 2x^2 = 0$

$x(3-2x) = 0$ — $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$

Alla fine ho da controllare 3 punti

$0,\ 2,\ \frac{3}{2}$

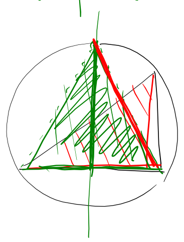
$A(0) = 0$ $\quad$ $A(2) = 0$ minimo

$$A\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2\cdot\tfrac{3}{2} - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3-\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{12-9}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

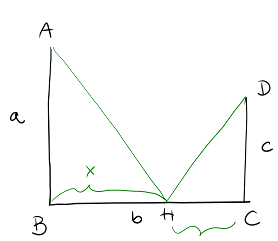
lato del triangolo $\rightsquigarrow \sqrt{3}$

è il triangolo equilatero,

oss. si poteva risolvere senza l'analisi!!



Es.



cercare H in modo che $\overline{AH} + \overline{HD}$ sia minimo.

$0 \le x \le b$

$\overline{AH} = \sqrt{a^2+x^2}$

$\overline{HD} = \sqrt{(b-x)^2+c^2}$

$f(x) = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2-2bx+x^2+c^2}$ $\qquad$ a, b, c costanti, x variabile

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{1}{2}\frac{2x-2b}{\sqrt{b^2-2bx+x^2+c^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{x-b}{\sqrt{b^2-2bx+x^2+c^2}} = \frac{x\sqrt{b^2-2bx+x^2+c^2} + (x-b)\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{b^2-2bx+x^2+c^2}}$$

$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2-2bx+x^2+c^2}$ a,b,c costanti, x variabile

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{1}{2}\frac{2x-2b}{\sqrt{b^2-2bx+x^2+c^2}}$$
$$=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{x-b}{\sqrt{b^2-2bx+x^2+c^2}}=\frac{x\sqrt{b^2-2bx+x^2+c^2}+(x-b)\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{b^2-2bx+x^2+c^2}}$$

$0\le x\le b$

$$x\sqrt{b^2-2bx+x^2+c^2}+(x-b)\sqrt{a^2+x^2}=0$$
$$x\sqrt{b^2-2bx+x^2+c^2}=(b-x)\sqrt{a^2+x^2}$$
$$x^2(b^2-2bx+x^2+c^2)=(b^2-2bx+x^2)(a^2+x^2)$$
$$\cancel{x^2b^2}-\cancel{2bx^3}+\cancel{x^4}+x^2c^2=a^2b^2+\cancel{b^2x^2}-2ba^2x-\cancel{2bx^3}+x^2a^2+\cancel{x^4}$$
$$a^2b^2-2ba^2x+x^2a^2-x^2c^2=0$$
$$(a^2-c^2)x^2-2ba^2x+a^2b^2=0$$
$$x_{1,2}=\frac{ba^2\pm\sqrt{b^2a^4-a^2b^2(a^2-c^2)}}{a^2-c^2}=\frac{ba^2\mp\sqrt{a^2b^2c^2}}{a^2-c^2}=\frac{ba^2\mp abc}{a^2-c^2}=\frac{ab(a\pm c)}{a^2-c^2}$$

$ab\cdot\frac{1}{a-c}$

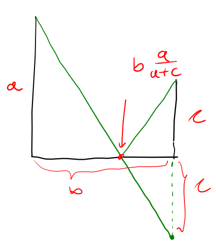
$ab\cdot\frac{1}{a+c}$

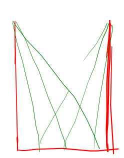
$x_1=b\cdot\frac{a}{a-c}$ $>b$ non è accettabile

$$\boxed{x_2=b\cdot\frac{a}{a+c}}$$

minimo

si vede quanto vale f in 0, $b\frac{a}{a+c}$, b





3 TEOREMI IMPORTANTI

Teorema (Rolle)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$,
- f continua in $[a,b]$
- f derivabile in $]a,b[$
- $f(a)=f(b)$

Allora $\exists\,\xi\in\,]a,b[\,:\ f'(\xi)=0$

dim. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ed è continua in $[a,b]$.
Posso applicare Weierstrass

dim. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ed è continua in $[a,b]$.

Posso applicare Weierstrass

f ha massimo e minimo assoluti

ha x_{max} e x_{min} (x_{max} è un pto di massimo assoluto, x_{min} è un punto di minimo assoluto)

ho 2 possibilità

1) $\{x_{max}, x_{min}\} \subseteq \{a,b\}$ ma $f(a)=f(b)$

allora $\boxed{f(x_{max}) = f(x_{min})}$

allora f è costante

allora $f'(x)=0 \quad \forall x\in]a,b[$

oppure

2) $\{x_{max}, x_{min}\} \not\subseteq \{a,b\}$

allora o $x_{max}\in]a,b[$

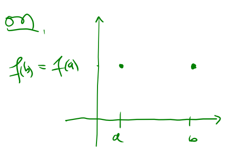
o $x_{min}\in]a,b[$

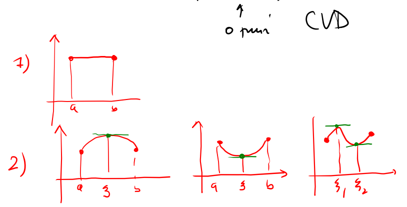
nel punto, di max. o min, che sta in $]a,b[$ applico Fermat

e $f'(x_{max})=0$ ↑ o min

CVD

oss.





T. (Cauchy)

Siano $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$

- f,g continue in $[a,b]$
- f,g derivabili in $]a,b[$
- $\forall x\in]a,b[,\ g'(x)\neq 0$

Allora $\exists \xi\in]a,b[$:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

dim. Consideriamo una funzione

$\Phi:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\Phi(x) = f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a))$

1) Φ è continua in $[a,b]$? sì — somma e prodotto di funzioni continue

2) Φ è derivabile in $]a,b[$? sì — somma e prodotto di funzioni derivabili

3) $\Phi(a) = f(a)(g(b)-g(a)) - g(a)(f(b)-f(a)) =$

$= f(a)g(b) - \cancel{f(a)g(a)} - g(a)f(b) + \cancel{g(a)f(a)} = f(a)g(b) - g(a)f(b)$

$\Phi(b) = f(b)(g(b)-g(a)) - g(b)(f(b)-f(a))$

$= \cancel{f(b)g(b)} - f(b)g(a) - \cancel{g(b)f(b)} + g(b)f(a) = -f(b)g(a) + g(b)f(a)$

$\Phi(a) = \Phi(b)$

Applico Rolle $\exists \xi : \Phi'(\xi) = 0$

$f'(\xi)(g(b)-g(a)) - g'(\xi)(f(b)-f(a)) = 0$

Applico Rolle $\exists \xi : \Phi'(\xi) = 0$

$$f'(\xi)(g(b)-g(a)) - g'(\xi)(f(b)-f(a)) = 0$$

$$f'(\xi)(g(b)-g(a)) = g'(\xi)(f(b)-f(a))$$

$g'(\xi) \neq 0$ (perché $g'(x) \neq 0 \ \forall x$)

posso dividere per $g'(\xi)$

$\underbrace{\text{¿ posso dividere per } g(b)-g(a) \text{ ?}}_{\text{sì}}$

sì perché se fosse $g(b) = g(a)$ potrei applicare Rolle e ci sarebbe ξ t.c. $g'(\xi) = 0$ ma $g'(x) \neq 0 \ \forall x$ ....

divido e concludo

CVD.

T. (Lagrange)

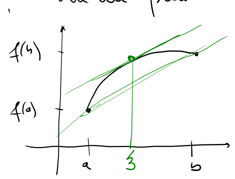
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$, f derivabile su $]a,b[$

Allora esiste $\xi \in]a,b[\ : \ f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

dim. si applica Cauchy con f e $g(x) = x$

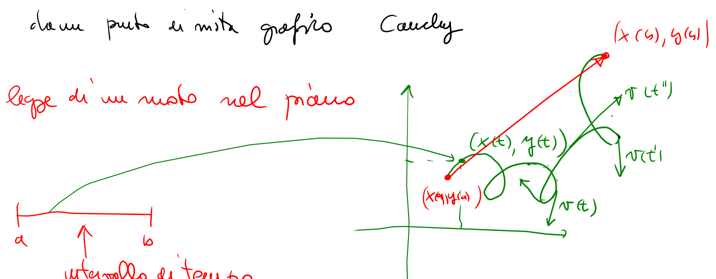
CVD.

oss. da un punto di vista grafico



c'è un punto in cui la tangente è parallela alla secante per gli estremi.

oss. da un punto di vista grafico Cauchy



$t \longmapsto (x(t), y(t))$

$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

spostamento è $(x(b)-x(a), \ y(b)-y(a))$

la velocità istantanea $v(t) = (x'(t), y'(t))$

$$x'(\xi)(y(b)-y(a)) - y'(\xi)(x(b)-x(a)) = 0$$

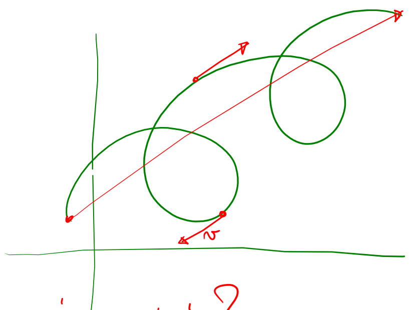
$$\det \begin{pmatrix} x(b)-x(a) & y(b)-y(a) \\ x'(\xi) & y'(\xi) \end{pmatrix} = 0$$

i vettori $(x(b)-x(a), y(b)-y(a))$, $(x'(\xi), y'(\xi))$ sono paralleli teorema di Cauchy

$\Downarrow$

in un moto nel piano (con legge oraria continua e derivabile)

c'è un istante in cui la velocità istantanea è parallela allo spostamento



¿e in 3 dimensioni? non vale

2 corollari importanti

T. sia $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad$ I intervallo, f derivabile

f è crescente se e solo se $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$

dim. (f crescente significa $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$)

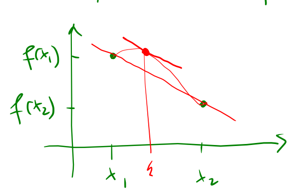
f sia crescente allora $R^f_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

allora $\lim_{x \to x_0} R^f_{x_0}(x) = f'(x_0) \geq 0$ (perché vale la permanenza del segno)

viceversa per assurdo

sia falso che f è crescente

$\exists\, x_1, x_2 \in I : \quad x_1 < x_2 \ \wedge \ f(x_1) > f(x_2)$



Applico Lagrange a $f|_{[x_1, x_2]}$

$\exists\, \xi \in]x_1, x_2[\ : \ f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$

impossibile

CVD