THM **CLASSIFICAZIONE CUBICHE LISCIE**

ANCHE DETTE **CURVE ELLITTICHE**

$g=1$: 

Ogni $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}(F)$ **LISCIA** è proiettivamente equivalente a

$$F_{\text{LEGENDRE}}: x_0 x_2^2 = x_1(x_1 - x_0)(x_1 - c\cdot x_0) \qquad c \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$$

NON È QUINDI DETTO CHE TUTTE LE CUBICHE LISCE SONO PROJ. EQUIVALENTI! DIPENDONO DAL PARAMETRO c ORA CI SONO PROIETTIVITÀ TRA c DIVERSI?

Equivalentemente nella forma affine:

$$aF_{\text{LEGENDRE}}: y^2 = x(x-1)(x-c)$$

FORMA o RAPPRESENTAZIONE di LEGENDRE.

Inoltre ogni cubica liscia ha esattamente **9** punti di flesso **A TRE A TRE ALLINEATI** [ovvero se una retta ne contiene due allora ne contiene un terzo.

Prop: $Z_{\mathbb{P}}(F) \cap Z_{\mathbb{P}}(H_F) = \{\text{FLESSI}\} \cup \underbrace{Sing(Z_{\mathbb{P}}(F))}_{=\emptyset \text{ PER IPOTESI}} \Rightarrow \exists$ almeno un flesso P

$\deg = 3$ $\quad \deg = 3$

che possiamo supporre a meno di proiettività in $P = [0:0:1]$ con tangente $x_0 = 0$.

Allora in coordinate affini abbiamo

$$aF: \quad y^2 + bxy + cy = g_1(x), \qquad \deg(g_1) = 3$$

Applichiamo l'affinità:

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y - \frac{b}{2}X - \frac{c}{2} \end{cases}$$

ottenendo $\rightsquigarrow$ $Y^2 = g(X)$ (SEMPRE DI GRADO 3)

Osserviamo che se $g(X)$ avesse una radice multipla in $X = \alpha \Rightarrow$ la curva sarebbe singolare in $(\alpha, 0)$, quindi otteniamo la forma

$$Y^2 = a \cdot (X - \alpha_1) \cdot (X - \alpha_2) \cdot (X - \alpha_3)$$

$$\begin{cases} \alpha_i \text{ DISTINTI} \\ a \neq 0 \end{cases}$$

Applichiamo ancora una affinità:

$$\begin{cases} X = (\alpha_2 - \alpha_1)X' + \alpha_1 \\ Y = \sqrt{a(\alpha_2-\alpha_1)^3}\,Y' \end{cases} \xrightarrow{\text{otteniamo:}} (Y')^2 = X'(X'-1)\left(X' - \underbrace{\frac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}}_{=:c}\right)$$

E NOTIAMO CHE $c \notin \{0,1,\infty\}$
È EQUIVALENTE A α_i DISTINTE

Per la dimostrazione dei flessi si veda il [SERVEDI, TEOREMA 36.2]

□

Andiamo a rispondere alle domande di prima: ci sono costanti c diverse tali che le curve associate in forma di Legendre siano proj. equivalenti?

nota essenziale per la buona definizione

DEF $j : \mathbb{C}\setminus\{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$c \longmapsto \frac{(c^2-c+1)^3}{c^2(c-1)^2}$$

FUNZIONE MODULO

Sia $C = Z_p(F)$ una curva ellittica (cubica piana liscia) e sia $y^2 = x(x-1)(x-c)$ la sua forma di Legendre, allora

IL MODULO di $Z_p(F)$ è il valore $j(c) \in \mathbb{C}$

LEMMA **j SURIETTIVA**

Proof.: sia $j_0 \in \mathbb{C}$ e sia $Q_{j_0}(x) := (x^2-x+1)^3 - j_0 \cdot x^2(x-1)^2 \in \mathbb{C}[x]$.

Non rimane che mostrare che Q ha una radice diversa da 0 e 1.

$\mathbb{C}$ alg. chiuso $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} : Q_{j_0}(c) = 0$

Per concludere basta osservare che $Q_{j_0}(0) = Q_{j_0}(1) = 1 \quad \forall j_0 \in \mathbb{C}$

ovvero 0 e 1 non sono mai radice $\Rightarrow$ $j(c) = j_0$ $\square$

D: Non è che per caso j è anche iniettiva? **NOPE**, anzi, **GENERICAMENTE** la sua **FIBRA** ha cardinalità **SEI**.

LEMMA La preimmagine della funzione modulo j genericamente è:

$$j^{\leftarrow}(j(c)) = S_c := \left\{ c, \frac{1}{c}, 1-c, \frac{1}{1-c}, \frac{c-1}{c}, \frac{c}{c-1} \right\} \qquad c \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

RISPETTO ALLA FUNZIONE

$$x \mapsto \frac{ax+b}{ex+f} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix}$$

det: $+1 \quad -1 \quad -1 \quad +1 \quad +1 \quad -1$

Ovvero $|j^{\leftarrow}(c)| = 6$ per ogni elemento del codominio a meno di un numero finito di valori.

Proof: $Q_{j(c)}(x) := (x^2-x+1)^3 - j(c)\cdot x^2(x-1)^2 \in \mathbb{C}[x]_6$ polinomio di grado 6 su un campo algebricamente chiuso allora ammette 6 radici complesse. Si può verificare per sostituzione che le radici proposte sono effettivamente radici e sono quindi le uniche. □

Q: Perché j è utile?

THM j É UN INVARIANTE COMPLETO DI PROIETTIVITÁ PER LE CURVE ELLITTICHE

In altre parole se $C: y^2 = x(x-1)(x-c)$ ← CURVE ELLITTICHE IN FORMA DI LEGENDRE

$C': y^2 = x(x-1)(x-c')$

Allora abbiamo:

$$C \sim C' \iff j(c) = j(c')$$

Proof: $\Rightarrow$ Se $C \sim C' \Rightarrow$ sono entrambe proiettivamente equiv. al proj. $(y^2 = x(x-1)(x-c))$ per lo stesso $c \Rightarrow j(C) = j(C') = j(c)$.

$\Leftarrow$ Se $j(c) = j(c') \Rightarrow c' \in S_c \Rightarrow$ è sufficiente mostrare che esiste una proiettività tra $\mathbb{Z}_p(F_c)$ e $\mathbb{Z}_p(F_{c'})$ $\forall c' \in S_c$

Si nota che per $c' = c$ la proiettività è l'identità

e che per valori diversi da $c' = 1/c$ e $c' = 1-c$

si possono comporre le proiettività relative a soltanto questi due valori. ← LEGENDRE PER $c \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$

Quindi rimane da esibire le trasformazioni appropriate per questi due valori. Le espressioni sono più semplici nell'affine come affermato e sono:

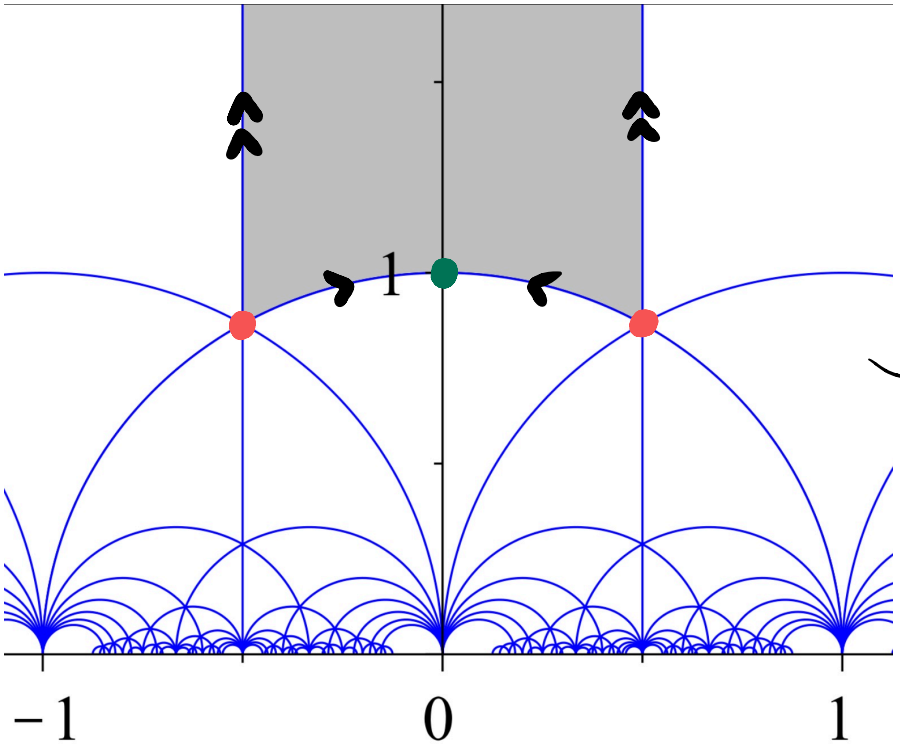
$$Y^2 = X(X-1)(X-c) \xrightarrow{\begin{cases} X \mapsto cX \\ Y \mapsto c^{3/2}Y \end{cases}} Y^2 = X(X-1)(X-c^{-1})$$

$$Y^2 = X(X-1)(X-c) \xrightarrow{\begin{cases} X \mapsto -X+1 \\ Y \mapsto iY \end{cases}} Y^2 = X(X-1)(X-1+c)$$

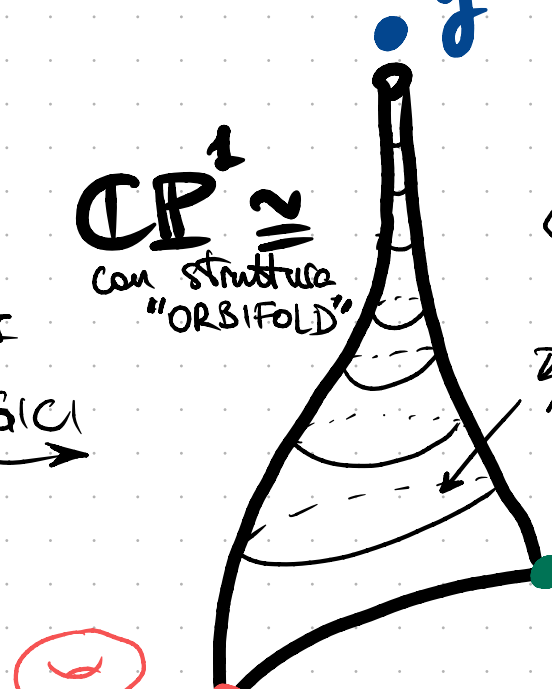
Questo conclude la dimostrazione.

□

Spazio dei moduli delle curve ellittiche $\overline{\mathcal{M}}_{1,1}$



APPLICANDO I QUOZIENTI TOPOLOGICI



$\mathbb{CP}^1 \cong$ con struttura "ORBIFOLD"

NODATA nella COMPATTIFICAZ.

$y^2 = x^3 - x$

$\langle (x,y) \mapsto (x,-y) \rangle$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$y^2 = x^3 + ax$

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$\langle (x,y) \mapsto (-x, iy) \rangle$

$y^2 = x^3 + b$

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$\langle (x,y) \mapsto (e^{\frac{2\pi k i}{3}} x, -y) \rangle_{k=1,2,3}$