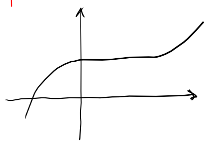
Lezione 33 - 25/11/2025

def. $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$

f si dice crescente se $\forall x_1, x_2 \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

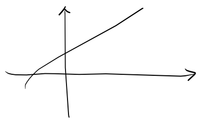
può essere costante su qualche tratto

$\leq$



f si dice strettamente crescente se $\forall x_1, x_2 \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$<$



Teo. f crescente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x$

Corollario 2.

sia $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo, f derivabile

f è costante $\Leftrightarrow \forall x \in I, \ f'(x) = 0$

dim. se f è costante sappiamo che $f'(x) = 0 \ \forall x$

viceversa

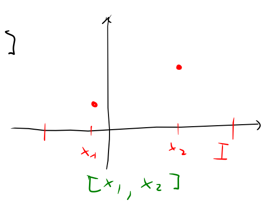
Sia f derivabile su I intervallo e

$\forall x, \ f'(x) = 0$

per assurdo f non sia costante

$\exists x_1, x_2 \in I$ t.c. $x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \neq f(x_2)$

Applico Lagrange a $f_{|[x_1, x_2]}$



$\exists \xi \in]x_1, x_2[$ t.c.

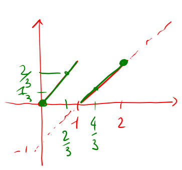
$f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$f(x_2) - f(x_1) \neq 0$
$x_2 - x_1 \neq 0$ $\Rightarrow \neq 0$

$f'(\xi) \neq 0$ impossibile

oss. È essenziale che f sia definita su un intervallo

es. $f: [0,1[\cup]1,2]$ $\quad f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ -1+x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



f è derivabile nel dominio? sì

$f'(x) = 1 \quad \forall x \in$ Dominio

f è crescente? no

Es. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

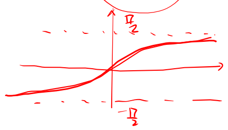
$f(x) = \text{arctg}\, x + \text{arctg}\, \frac{1}{x}$

Es. $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

disegnare il grafico.

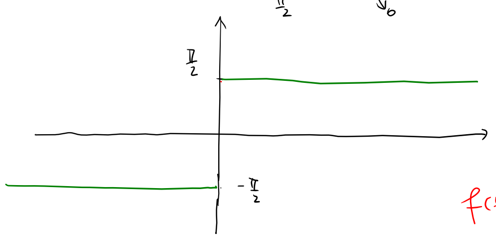
1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \overset{-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{arctg} x} + \overset{0}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}} = -\frac{\pi}{2}$



$\lim_{x \to 0^-} \overset{0}{\operatorname{arctg} x} + \overset{-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}} = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to 0^+} \overset{0}{\operatorname{arctg} x} + \overset{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to +\infty} \underset{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{arctg} x} + \underset{0}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}$



$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

$x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ $\qquad (x^{-1})' = -1\, x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\frac{x^2+1}{\cancel{x^2}}} \cdot \frac{-1}{\cancel{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$

$f'(x) = 0 \quad \forall x \in$ Dominio $\qquad f$ è costante su $]0, +\infty[$ e su $]-\infty, 0[$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Esercizi Sia $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ continua
tale $f(0) = 1$, $f(2) = 3$

1) provare che f è limitata
2) provare che $[1,3] \subseteq f([0,2])$

1) il dominio è un compatto, f è continua
l'insieme immagine è un compatto
$\Rightarrow f([0,2])$ è in particolare limitato,
oppure f è continua su $[0,2]$ int. chiuso e limitato
per Weierstrass, f ha max e min assoluti
in particolare $\forall x$, $f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max})$
sono 2 numeri fissati

Weierstrass o (compattezza)

2) basta usare il teo. dei valori intermedi

2) basta usare il teor. dei valori intermedi

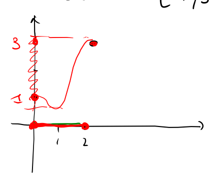
f continua su $[0,2]$ intervallo

$f([0,2])$ contiene 1 $\quad (f(0)=1)$

contiene 3 $\quad (f(2)=3)$

allora contiene tutti i valori intermedi tra 1 e 3

cioè $[1,3] \subseteq f([0,2])$



Es. $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ ed è tale che

$f(-1)=1, \quad f(0)=0, \quad f(1)=1$

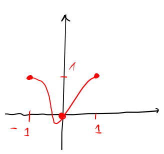
f sia continua su $[-1,1]$ e derivabile su $]-1,1[$.

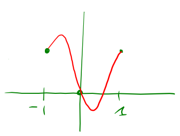
1) provare che esiste $\xi_1 \in]-1,1[$ t.c.

$f'(\xi_1)=0$

2) provare che $[0,1] \subseteq f([-1,1])$

3) provare che $\frac{1}{2} \in f'(]-1,1[)$





1) basta usare il teor. di Rolle

infatti $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua su $[-1,1]$

derivabile su $]-1,1[$

$f(-1)=f(1)=1$

2) basta usare il teorema dei valori intermedi

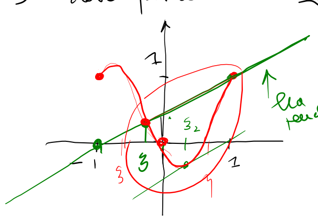
f è continua su un intervallo $([-1,1])$

$0 \in f([-1,1]) \quad (f(0)=0)$

$1 \in f([-1,1]) \quad (f(1)=1)$

quindi $[0,1] \subseteq f([-1,1])$

3) devo provare che $\exists\, \xi_2 \in]-1,1[$ t.c. $f'(\xi_2)=\frac{1}{2}$



idea

ha pendenza $\frac{1}{2}$ devo usare Lagrange

considero la funz.

$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

per il teorema degli zeri $\exists\, \xi \in]-1,0[$

in cui $f(\xi) = g(\xi)$

basta applicare Lagrange a $f_{|[\xi,1]}$

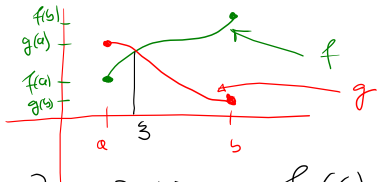
osservazione:

osservazione:

se ho 2 funzioni continue su $[a,b]$

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

con $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$



Allora $\exists\, \xi \in]a,b[\; : \; f(\xi) = g(\xi)$

(è il teorema degli zeri)

3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile

si supponga che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

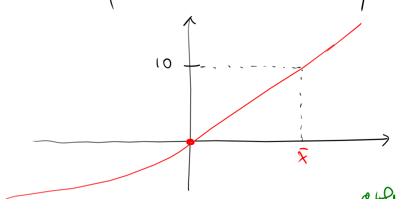
che $f(0) = 0$

1) dire se esiste $\bar{x} \in \mathbb{R} : f(\bar{x}) = 10$
2) Sia $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 10\}$

provare che E è un insieme chiuso

3) Sia $F = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 10\}$

provare che F è aperto.



¿ $\exists\, \bar{x} : f(\bar{x}) = 10$?

sì perché

applico il teor. dei valori intermedi

f derivabile $\Rightarrow$ f continua (ok)

f è def. in tutto $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ è intervallo (ok)

$f(0) = 0 < 10$

¿ come faccio a essere sicuro che $\exists\, \bar{x} : f(\bar{x}) > 10$?

uso il fatto che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

quindi fissato 10 da un qualche x^* in poi, $f(x) > 10$.

2) Sia $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 10\}$

¿ come faccio a vedere che è chiuso ?

Provo che $\mathbb{R} \setminus E$ (il complementare) è aperto.

$\complement E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 10\}$ ← devo provare che è aperto.

Si usa la permanenza del segno

se $f(\bar{x}) \neq 10$ allora $\exists\, U$ di $\bar{x}$ t.c. $\forall y \in U$ $f(y) \neq 10$

Oppure.

supponiamo che $(x_n)_n$ sia una successione in E

significa $\forall n,\quad f(x_n) = 10$

supponiamo $\lim_n x_n = \bar{x}$

allora, essendo f continua, $\lim_n \underset{\underset{10}{\parallel}}{f(x_n)} = f(\bar{x})$

$\Rightarrow f(\bar{x}) = 10 \Rightarrow \bar{x} \in E$

$\Rightarrow E$ è chiuso.

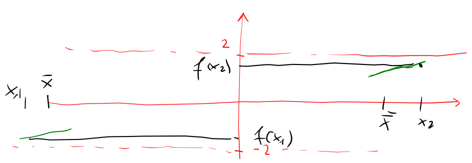
Esercizio Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

supponiamo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

1) provare che esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ tali che $f(x_1) < -1$ e $f(x_2) > 1$

2) supponiamo che f sia continua provare che $\exists \bar{x} \in \mathbb{R} : f(\bar{x}) = 0$

3) supponiamo che f sia derivabile provare che $\exists x^* \in \mathbb{R} : f'(x^*) > 0$



per 1) si usa la def. di limite

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2 \Rightarrow \exists \bar{x} : \forall x < \bar{x},\ f(x) < -1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \exists \bar{\bar{x}} : \forall x > \bar{\bar{x}},\ f(x) > 1$

2) si usa il teo dei valori intermedi con $f_{|[x_1, x_2]}$

x_1 e x_2 ricavati al punto 1)

3) si usa Lagrange su $f_{|[x_1, x_2]}$

$f(x_1) < -1$, $f(x_2) > 1$

$x_1 < x_2$

$\exists \xi : f'(\xi) = \frac{\overbrace{f(x_2) - f(x_1)}^{>0}}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} > 0$

opp. supponiamo $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \le 0$

$\Rightarrow f$ sarebbe decrescente e non può andare da -2 a 2

ES. Sia $f : [-2,0] \to \mathbb{R}$ f continua
sia $f(-2) = 1$, $f(0) = 2$

1) provare che f è limitata

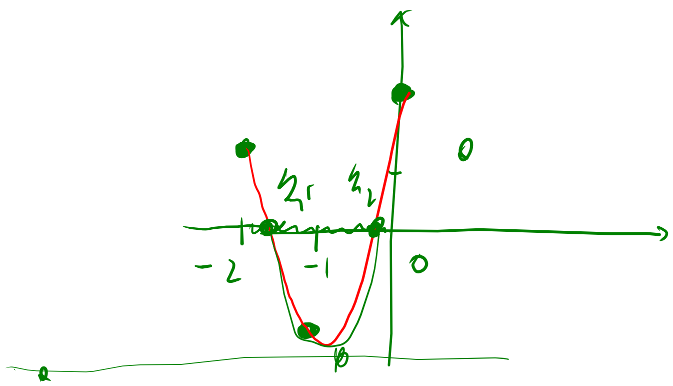
Weierstrass o compattezza

2) provare che $\{x \in [-2,0] : f(x) < 0\}$ è aperto

permanenza del segno

3) supponendo che $f(-1) = -1$, provare che ci sono almeno 2 punti distinti in cui f vale 0,

teo. dei valori intermedi su $[-2,-1]$ e $[-1,0]$



4) supponiamo f sia derivabile e che valga la condizione 3)

provare $\exists\, \xi$ t.c. $f'(\xi) = 0$

applico Rolle a $f|_{[\xi_1, \xi_2]}$

del punto 3)