Abbiamo visto che passare da equazioni cartesiane a equazioni parametriche corrisponde a esprimere la generica soluzione di un sistema lineare in termini di parametri liberi (che sono tanti quanti la dimensione del sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato).

Ci chiediamo quindi come passare da equazioni parametriche a equazioni cartesiane. Supponiamo di avere date delle equazioni parametriche di un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n_K$:

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + \dots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + \dots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

e supponiamo che $w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \dots, w_k = \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix}$ sia una base della giacitura W di S. Allora un punto $P = (x_1 \dots x_n)$ appartiene a S se e solo se

$$\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \text{ è combinazione lineare di } w_1, \dots, w_k$$

ovvero se e solo se i vettori $\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix}, w_1, \dots, w_k$ sono linearmente dipendenti. Per ipotesi $\dim W = k$ perché $w_1, \dots, w_k$ è una base di W, quindi

$$rg \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & & w_{nk} \end{pmatrix} = \dim W = k$$

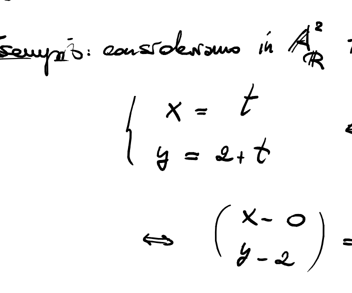
e quindi $P \in S$ se e solo se

$$rg \underbrace{\begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1k} & x_1 - q_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{nk} & x_n - q_n \end{pmatrix}}_{(*)} = k$$

Infatti

$$\left.\begin{array}{l} w_1, \dots, w_k \text{ sono una base} \Rightarrow rg(*) \geq k \\ w_1, \dots w_k, \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \text{ sono lin. dip} \Rightarrow rg(*) \leq k \end{array}\right\} \Rightarrow rg(*) = k$$

Abbiamo ottenuto una matrice $n \times (k+1)$ e vogliamo imporre che il suo rango sia esattamente k. Per capire che tipo di condizioni dobbiamo imporre a tal fine, utilizziamo l'algoritmo di gradinizzazione di Gauss:



questa è una matrice a scala con k righe non nulle

dato che la matrice è a scala e vogliamo imporre che abbia rango k, queste $(n-k)$ entrate devono essere nulle; tali entrate sono tutte espressioni di grado 1 in $x_1 \dots x_n$ che noi vogliamo si annullino contemporaneamente, ovvero determiniamo un sistema lineare $AX = b$ le cui soluzioni sono proprio i punti di S e quindi sono equazioni cartesiane per S.

<u>Esempio</u>: consideriamo in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ il sottospazio S di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = t \\ y - 2 = t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi S passa per $(0, 2)$ e ha giacitura $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

per ottenere equazioni cartesiane di S considero

$$\begin{pmatrix} 1 & x - 0 \\ 1 & y - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[II - I]{} \begin{pmatrix} 1 & x - 0 \\ 0 & -x + y - 2 \end{pmatrix}$$

notiamo che $\dim S = \dim(\text{giacitura di } S)$
$= \dim\left(\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = 1$

e cerchiamo quindi $n - k = 2 - 1 = 1$ equazioni cartesiane; tale equazione è quindi data da:

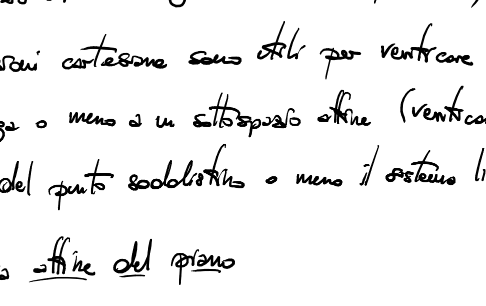
$$-x + y - 2 = 0$$

<u>Oss</u>: per quanto abbiamo visto, un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n_K$ di dimensione k è determinato da $n - k$ equazioni cartesiane; pertanto:

- una retta nel piano è determinata da 1 equazione cartesiana
- un piano nello spazio $\mathbb{A}^3_K$ è determinato da 1 equazione cartesiana.
- una retta nello spazio $\mathbb{A}^3_K$ è determinata da 2 equazioni cartesiane.

<u>Oss</u>: se $S \subseteq \mathbb{A}^3_K$ è una retta, allora S è determinata da 2 equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = d_1 \leftarrow \text{equazione di un piano} \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = d_2 \leftarrow \text{equazione di un piano} \end{cases}$$



una retta nello spazio è intersezione di due piani

Notiamo che:

- le equazioni parametriche sono utili per ottenere punti del sottospazio affine (assegnando valori ai parametri)
- le equazioni cartesiane sono utili per verificare se un punto appartenga o meno a un sottospazio affine (verificando se le entrate del punto soddisfino o meno il sistema lineare).

<u>Geometria affine del piano</u>

Ci focalizziamo su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Vale innanzitutto $\dim \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ un sottospazio affine. Ci sono tre possibilità:

- $\dim S = 0$, allora S è un punto di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$
- $\dim S = 1$, allora S è una retta di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$
- $\dim S = 2$, allora $S = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

Analizziamo dunque il caso in cui S abbia dimensione 1, ovvero sia una retta. Essendo S un sottospazio affine, esso è determinato da un punto Q e dalla sua giacitura W. Scriviamo $Q = (q_1, q_2)$.

Supponiamo che $\dim W = 1$, quindi

$$W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}\right) \quad \text{con } \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi equazioni parametriche per S:

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + l \cdot t \\ x_2 = q_2 + m \cdot t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Se volessimo ottenere equazioni cartesiane, considereremo la matrice

$$\begin{pmatrix} l & x_1 - q_1 \\ m & x_2 - q_2 \end{pmatrix}$$

alla quale vogliamo imporre di avere rango 1. Questa matrice non è la matrice nulla perché $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per ipotesi, quindi essa ha almeno rango 1, ovvero ha rango 1 oppure ha rango 2. La matrice avrebbe rango 2 se e solo se fosse invertibile, se e solo se il suo determinante fosse diverso da zero. Quindi la matrice ha rango 1 se e solo se il suo determinante si annulla:

$$l(x_2 - q_2) - m(x_1 - q_1) = 0$$

Se scriviamo $x_1 = x$ e $x_2 = y$, e supponiamo $l \neq 0$, allora la precedente equazione è equivalente a

$$y = q_2 + \frac{m}{l}(x - q_1)$$

ovvero ritroviamo la "classica" equazione di una retta non verticale.

Dalla geometria elementare sappiamo che per due punti distinti del piano passa una e una sola retta. Determiniamo tale retta.

Siano $Q, R \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$:

$$Q = (q_1, q_2) \qquad R = (r_1, r_2)$$

Se S è una retta di giacitura W e $Q, R \in S$, allora $\overrightarrow{QR} \in W$.

Se $Q \neq R$, allora $\overrightarrow{QR} \neq 0$ e vale che

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} r_1 - q_1 \\ r_2 - q_2 \end{pmatrix}$$

Quindi $\overrightarrow{QR}$ è un vettore non nullo di W e W è un sottospazio vettoriale di dimensione 1, quindi l'unica possibilità è che

$$W = \operatorname{span}(\overrightarrow{QR})$$

Quindi equazioni parametriche della retta per Q ed R sono:

$$\begin{cases} x = q_1 + (r_1 - q_1) \cdot t \\ y = q_2 + (r_2 - q_2) \cdot t \end{cases}$$

Analogamente, se $P = (x, y)$, allora

$$P \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{QP} \in W = \operatorname{span}(\overrightarrow{QR})$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - q_1 \\ y - q_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} r_1 - q_1 \\ r_2 - q_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - q_1 \\ y - q_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1 - q_1 \\ r_2 - q_2 \end{pmatrix} \text{ sono linearmente dipendenti}$$

$$\Leftrightarrow rg \begin{pmatrix} x - q_1 & r_1 - q_1 \\ y - q_2 & r_2 - q_2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow (r_2 - q_2)(x - q_1) - (r_1 - q_1)(y - q_2) = 0$$

Anche qui come prima notiamo che se $r_1 \neq q_1$, ovvero se la retta non è verticale, possiamo scrivere:

$$y = q_2 + \left(\frac{r_2 - q_2}{r_1 - q_1}\right)(x - q_1)$$

Dalla geometria elementare sappiamo che due rette nel piano possono essere:

- parallele (e come caso particolare, coincidenti) $\Leftrightarrow$ hanno tutti o nessun punto in comune
- incidenti in un unico punto.

<u>Prop</u>: siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ due rette affini, allora

S_1 ed S_2 hanno tutti o nessun punto in comune $\Leftrightarrow$ giacitura(S_1) = giacitura(S_2)

<u>Prop</u>: siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ due rette affini, allora

S_1 ed S_2 hanno un unico punto di intersezione $\Leftrightarrow$ giacitura(S_1) $\neq$ giacitura(S_2)

<u>Posizione reciproca tra sottospazi affini</u>

Introduciamo un linguaggio per parlare di parallelismo tra sottospazi affini, generalizzando quanto abbiamo visto nel caso delle rette. Notiamo subito che, per ragioni di dimensione, non possiamo richiedere che due sottospazi siano paralleli se e solo se le loro giaciture sono uguali (consideriamo, ad esempio, una retta e un piano paralleli nello spazio a tre dimensioni). Ci serve quindi una condizione più debole.

<u>Def</u>: siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ due sottospazi affini di giaciture rispettivamente W_1 e W_2; allora S_1 ed S_2 si dicono:

i. <u>incidenti</u> se $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$
(e <u>coincidenti</u> se $S_1 = S_2$)

ii. <u>paralleli</u> (e scriviamo $S_1 /\!/ S_2$) se
$W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$
(notiamo che sottospazi paralleli possono essere incidenti)

iii. <u>sghembi</u> se non sono né paralleli né incidenti.

<u>Oss</u>: nel piano, due rette non possono mai essere sghembe.