

PRODOTTI TENSORI DI RAPPRESENTAZIONI

- Consideriamo due rappresentazioni R_1 e R_2 di un'alg. di Lie \mathfrak{g} .

$$\rho_{R_1} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_1) \quad \rho_{R_2} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_2)$$

con highest weights Λ_1 e Λ_2 .

- Rep. $R_1 \otimes R_2$ è f.c.

$$\rho_{R_1 \otimes R_2}(x) = \rho_{R_1}(x) \otimes \mathbb{1}_{R_2} + \mathbb{1}_{R_1} \otimes \rho_{R_2}(x)$$

con $\rho_{R_1 \otimes R_2} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_1 \otimes V_2)$.

- Sia $\{ | \lambda_a, m_{\lambda_a} \rangle \mid \lambda_a \text{ peso di } R_a \}$ una base di V_a di autovettori di \mathfrak{h} ($a=1,2$). m_{λ_a} è la possibile degenerazione del peso λ_a . D'ora in poi lo lasceremo implicito.

- $V_1 \otimes V_2$ è definito come combinator. lineari dei vettori della base def. da:

$$\{ | \lambda_1 \rangle \otimes | \lambda_2 \rangle \mid \lambda_1 \text{ peso di } R_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ peso di } R_2 \}$$

- $R_1 \otimes R_2$ non è generalmente irriducibile, ma si scompone: $R_1 \otimes R_2 = \bigoplus_i R^i$ R^i irred. rep

- $| \Lambda_1 \rangle \otimes | \Lambda_2 \rangle$ è highest weight vector per $R_1 \otimes R_2$, perché $e_{\alpha_i}^{R_1 \otimes R_2} | \Lambda_1 \rangle \otimes | \Lambda_2 \rangle = (e_{\alpha_i}^{R_1} | \Lambda_1 \rangle) \otimes | \Lambda_2 \rangle + | \Lambda_1 \rangle \otimes (e_{\alpha_i}^{R_2} | \Lambda_2 \rangle) = 0$ $\forall \alpha_i$ simple root e l'highest weight è $\Lambda_1 + \Lambda_2$.

• La rappresentaz. irrid. con highest weight $\Lambda_1 + \Lambda_2$ sarà quindi contenuta in $R_1 \otimes R_2$.

Togliamo i suoi pesi da $\{\lambda_1 + \lambda_2\}$ e prendiamo l'highest weight tra qlo che rimane. Togliamo qte seconde sottorep e così via finché non rimanejono più pesi.

ES. $sl(2, \mathbb{C})$: j_1 e j_2 sono due highest weight.

I loro Dynkin labels sono autovalori rispetto a base di Chevalley, cioè $\Lambda_1 = (2j_1)$ e $\Lambda_2 = (2j_2)$.

$\Lambda_1 + \Lambda_2 = 2(j_1 + j_2) \rightsquigarrow j = j_1 + j_2$ highest weight di rep. $R_1 \otimes R_2$.

Costruisco rep. $j_1 + j_2, \dots, -j_1 - j_2$, e così via:

$$R_{j_1} \otimes R_{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} R_j \quad \leftarrow \text{"componenti momenti ang. in MQ"}$$

ES. $sl(3, \mathbb{C}) \quad 3 \otimes \bar{3}$

3 : $\Lambda = (1, 0), (-1, 1), (0, -1)$

$\bar{3}$: $\Lambda = (0, 1), (1, -1), (-1, 0)$

} $3 \otimes \bar{3}$:

(1, 1), (2, -1), (0, 0)

(-1, 2), (0, 0), (-2, 1)

(0, 0), (1, -2), (-1, -1)

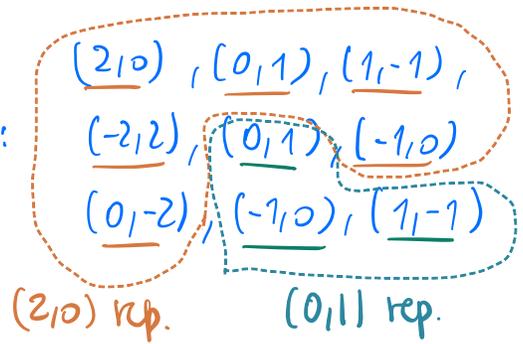
(1, 1) rep.
(Adj. rep.)

trivial rep. \rightarrow

$$\Rightarrow 3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$$

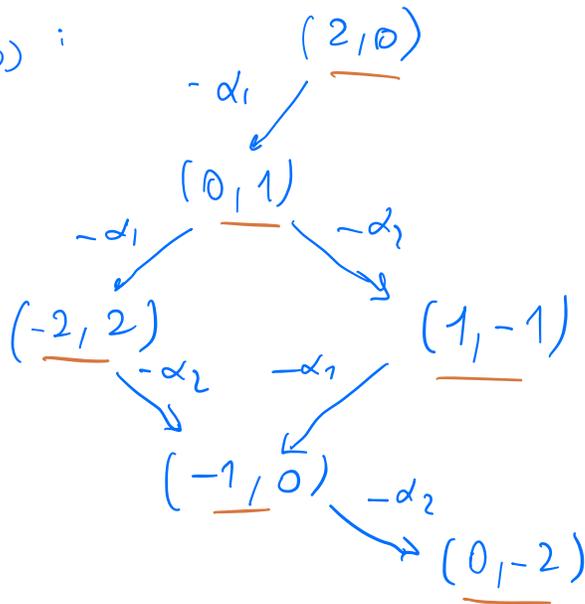
ES. $sl(3, \mathbb{C})$ $3 \otimes 3$

$3: \Lambda = (1, 0), (-1, 1), (0, -1) \rightarrow 3 \otimes 3:$



Vediamo che rep. è la $(2, 0)$:

$V_{(2,0)}$:



$\dim = 6$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

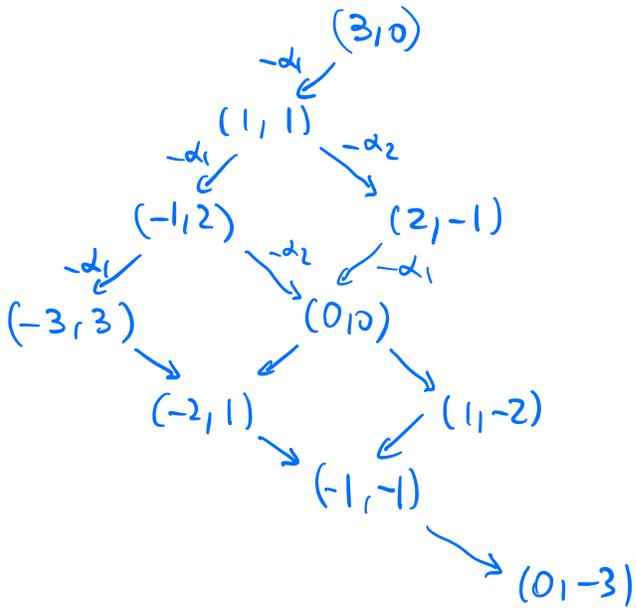
$$\Rightarrow 3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6$$

ES. Possiamo anche calcolare

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 3 \otimes (\bar{3} \oplus 6) = \underbrace{3 \otimes \bar{3}}_{1 \oplus 8} \oplus \underbrace{3 \otimes 6}_?$$

<u>6</u>	<u>3</u>	→ <u>3 ⊗ 6</u>			
(2,0)			(3,0)	(1,1)	(2,-1)
(0,1)	(1,0)		(1,1)	(-1,2)	(0,0)
(-2,2)	(-1,1)		(-1,2)	(-3,3)	(-2,1)
(1,-1)	(0,-1)		(2,-1)	(0,0)	(1,-2)
(-1,0)			(0,0)	(-2,1)	(-1,-1)
(0,-2)			(1,-2)	(-1,-1)	(0,-3)
					<u>10 rep.</u>

Dobbiamo calcolarci la $(3,0)$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$



Una volta sottratta la 10, rimane highest weight $(1,1)$ da cui ricostruisce la 8. Non rimane altro.

$$\Rightarrow 3 \otimes 6 = 10 \oplus 8$$

$$\Rightarrow 3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

SUBALGEBRAS and REPRESENTATIONS

- Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie semplice, col suo diagramma di Dynkin.

I suoi generatori possono essere scelti con $E_{\alpha \in \Delta}, h_{i=1, \dots, r}$, le cui regole di commutazione sono encodeate nel diagramma

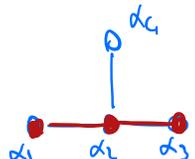
- Una sottoalgebra $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ è un sottospazio vettoriale di \mathfrak{g} t.c. $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \subset \mathfrak{g}'$.

- Possiamo costruire delle sottoalgebra di \mathfrak{g} prendendo un sottodiagramma del Dynkin diagram di \mathfrak{g}

ES.  $sl(2, \mathbb{C})$ subalgebra di $sl(4, \mathbb{C})$ (abbiamo già visto che esiste tale sottodg.)
 \parallel
 $\text{Span}(E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}, h_{\alpha_1})$

 $sl(2, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$
 \parallel
 $\text{Span}(E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}, h_{\alpha_1}; E_{\alpha_3}, E_{-\alpha_3}, h_{\alpha_3})$

Qto si rappresenta con la somma diretta \oplus $\left\{ \begin{array}{l} \text{commutano tra loro e il prodotto} \\ \text{di Lie fa rimanere in ciascun sottospazio} \end{array} \right.$

ES.  $\text{Span}(E_{\alpha}, h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}, h_{\alpha_3})$
 \parallel $\alpha \in \Delta_{A_3}$
 $A_3 = sl(4, \mathbb{C}) \subset so(8, \mathbb{C}) = D_4$

Possiamo aumentare la sottoalgebra aggiungendo un elem. di Cartan

che commuta con tutti i generatori di A_3 : h_{α_4} t.c. $\alpha_j^\vee(h_{\alpha_4}) = (\alpha_j^\vee, \alpha_4) = \delta_{j4}$

$\Rightarrow [h_{\alpha_4}, E_{\alpha}] = \alpha(h_{\alpha_4})E_{\alpha} = 0$ se α è com. di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. $[h_{\alpha_4}, h_{\alpha_i}] = 0$ per i Cartan.

$\Rightarrow A_3 \oplus \langle h_{\alpha_4} \rangle$ è una sottoalgebra di D_4 .

- Data una rappresentazione R di G , essa è una rep. anche per ogni sottoalg. $\mathfrak{g} \subset G$ (rep. riducibile)

In fatti se $x, y \in \mathfrak{g} \subset G$ $[x, y] \in \mathfrak{g}$ e

$$[\rho_R(x), \rho_R(y)] = \rho_R([x, y]).$$

ES. $\bullet \rightarrow \circ$

$A_1 \subset A_2$

$sl(2, \mathbb{C}) \subset sl(3, \mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in sl(3, \mathbb{C})$$

Prendiamo $R = \underline{\mathbb{3}}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 - ax_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$A_1 = \text{Span}(E_{d_1}, E_{-d_1}, t_{d_1})$

$$\Rightarrow V_R \cong \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^1$$

\uparrow qti sottosp. sono invarianti sotto $sl(2, \mathbb{C}) \subset sl(3, \mathbb{C})$

\Rightarrow forniscono una rep. della sottoalg. $sl(2, \mathbb{C})$ (irriducibile)

$$\begin{array}{ccc} \sim \underline{\mathbb{3}} & = & \underline{\mathbb{2}} \oplus \underline{\mathbb{1}} \\ \uparrow & & \swarrow \uparrow \\ \text{rep} & & \text{reps di} \\ \text{di } sl(3, \mathbb{C}) & & sl(2, \mathbb{C}) \end{array}$$

Vediamo con i Dynkin labels:

Il primo Dynkin label è l'autovale rispetto t_{α_1} e quindi fornisce informazioni sulla rep. di $sl(2, \mathbb{C})$.

$$\underline{\mathbb{3}}: \begin{array}{l} (1, 0) \\ (-1, 1) \\ (0, -1) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1, 0) \\ (-1, 1) \\ (0, -1) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \underline{\mathbb{2}} \\ \underline{\mathbb{1}} \end{array} \text{ di } sl(2, \mathbb{C})$$

Ancora vediamo che

$$\underline{\mathbb{3}} = \underline{\mathbb{2}} \oplus \underline{\mathbb{1}}$$

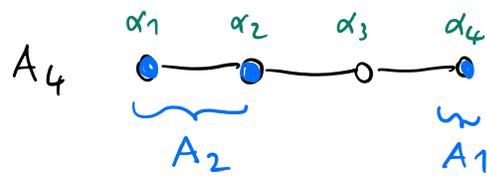
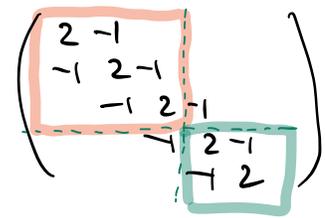
- Come descriviamo le rep. di alg. di Lie che sono somme dirette di alg. semplici? $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \leftarrow T_{(1)}^a, T_{(2)}^b$ $\begin{matrix} a=1, \dots, d_1 \\ b=1, \dots, d_2 \end{matrix}$

Sia R_1 rep di \mathfrak{g}_1 e R_2 rep di \mathfrak{g}_2 ,

$V_{R_1} \oplus V_{R_2}$ è un buon sp. di rep. per \mathfrak{g} , che viene indicata con (R_1, R_2)

$$\rho_{(R_1, R_2)}(\alpha^a T_{(1)}^a + \beta^b T_{(2)}^b) = \alpha^a \rho_{R_1}(T_{(1)}^a) \otimes \mathbb{1}_{R_2} + \beta^b \mathbb{1}_{R_1} \otimes \rho_{R_2}(T_{(2)}^b)$$

Esempio $sl(3, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \subset sl(5, \mathbb{C})$



$(su(5))$
 $(su(3) \oplus su(2))$

$A_2 \oplus A_1 \oplus \langle h_{\alpha_3} \rangle$ dove h_{α_i} t.c. $\alpha_j^\vee(h_{\alpha_i}) = (\alpha_i, \alpha_j^\vee) = d_{ij}$

$A_2 = \langle E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, E_{\alpha_1+\alpha_2}, E_{-\alpha_1}, E_{-\alpha_2}, E_{-\alpha_1-\alpha_2}, h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2} \rangle$

$A_1 = \langle E_{\alpha_4}, E_{-\alpha_4}, h_{\alpha_4} \rangle$

Prendiamo rep. $\Lambda = (1, 0, 0, 0)$ Ξ di $sl(5, \mathbb{C})$

$-\alpha_1$	$(\underline{1}, 0, 0, 0)$	} ≥ 3 di A_2 ≤ 1 di A_1	$q = 2/5$
$-\alpha_2$	$(\underline{-1}, 1, 0, 0)$		$q = -2/5 + 4/5 = 2/5$
$-\alpha_3$	$(0, \underline{-1}, 1, 0)$		$q = -4/5 + 6/5 = 2/5$
$-\alpha_4$	$(0, 0, \underline{-1}, 1)$	} ≥ 2 di A_1 ≤ 1 di A_2	$q = -6/5 + 3/5 = -3/5$
	$(0, 0, 0, \underline{-1})$		$q = -3/5$

Qta decomposizione viene solitamente indicata come :

$5 \rightarrow (3, 1)_{\frac{5}{3}} \oplus (1, 2)_{-\frac{3}{5}}$

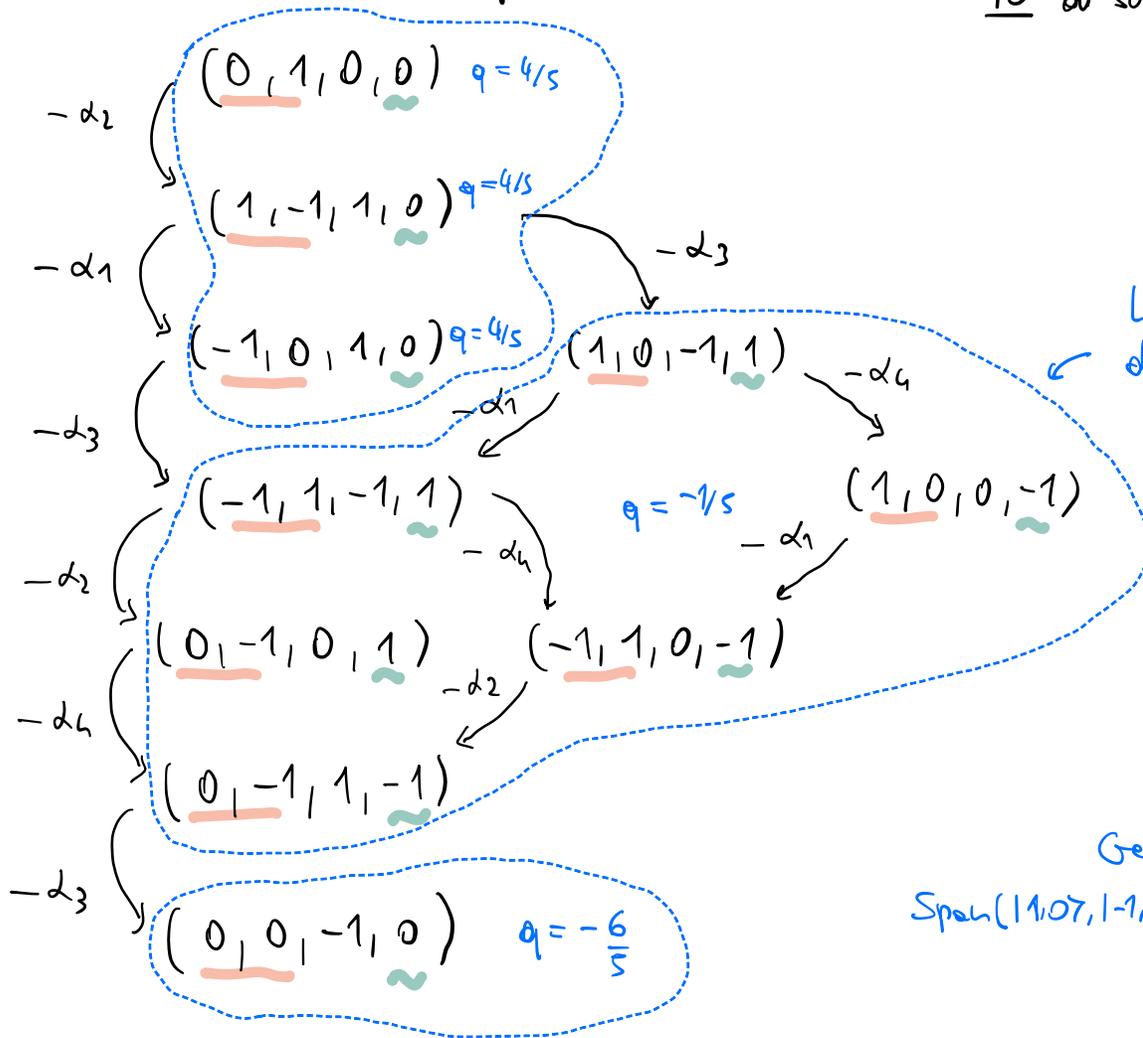
$t_i = \frac{2\alpha_i}{|\alpha_i|^2}$

$h_{\alpha_3} = a_i t_i$ con

$0 = \alpha_1(a_i t_i) = 2a_1 - a_2$	$a_2 = 2a_1 = 4/5$
$0 = \alpha_2(a_i t_i) = -a_1 + 2a_2 - a_3$	$a_3 = 3a_1 = 6/5$
$1 = \alpha_3(a_i t_i) = -a_2 + 2a_3 - a_4$	$a_1 = 2/5$
$0 = \alpha_4(a_i t_i) = -a_3 + 2a_4$	$a_4 = \frac{3}{2}a_1 = 3/5$

Prendiamo ora la rep $\Lambda = (0, 1, 0, 0)$

10 di $su(5)$



Leggiamo i Dynkin labels di A_2 e $A_1 \subset A_4$

$(1, 0, -1, 1) \rightarrow 1, 1, 0 \oplus 1, 1, 1$
etc. Quindi qui:

- $|1, 0\rangle \oplus |1, 1\rangle$
- $|1, 1, 0\rangle \oplus |1, 1, 1\rangle$
- $|1, 1, 1\rangle \oplus |1, 1, 1\rangle$
- $|1, 1, 1\rangle \oplus |1, 1, 1\rangle$
- $|0, 1, -1\rangle \oplus |1, 1, 1\rangle$
- $|0, 1, -1\rangle \oplus |1, 1, 1\rangle$

Generano

$\text{Span}(|1, 0, 1\rangle, |1, -1, 1\rangle, |0, 1, -1\rangle) \oplus \text{Span}(|1, 1, 1\rangle)$
 $(3, 2)$

$$10 \rightarrow (\bar{3}, 1)_{\frac{4}{5}} \oplus (3, 2)_{-\frac{1}{5}} \oplus (1, 1)_{-\frac{6}{5}}$$

Prendiamo la $(1, 0, 0, 1)$

24 di $\mathfrak{sl}(5, \mathbb{C})$ (Adjoint rep.)

\Rightarrow i pesi sono le roots :

$$\Delta_+ = \left\{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}_{\text{highest root } \theta} \right\}$$

#roots = 20

$r = 4$

Quindi i pesi sono

$\theta = (1, 0, 0, 1)$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ -2\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ -2\ 1 \\ 0\ 0\ 1\ -2 \\ \hline 2\ -1\ 0\ 0 \end{array}$$

$\alpha_1 = \theta - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = (2, -1, 0, 0)$

$\alpha_2 = \theta - \alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 = (-1, 2, -1, 0)$

$\alpha_3 = (0, -1, 2, -1)$ ← righe della Cartan matrix

$\alpha_4 = (0, 0, -1, 2)$

$\alpha_1 + \alpha_2 = (1, 1, -1, 0)$

$\alpha_2 + \alpha_3 = (-1, 1, 1, -1)$

$\alpha_3 + \alpha_4 = (0, -1, 1, 1)$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (1, 0, 1, -1)$

$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (-1, 1, 0, 1)$

$(0, 0, 0, 0)$

$(0, 0, 0, 0)$

$(0, 0, 0, 0)$

$(0, 0, 0, 0)$

e i negativi:

$(-1, 0, 0, -1)$

$(-2, 1, 0, 0)$

$(1, -2, 1, 0)$

$(0, 1, -2, 1)$

$(0, 0, 1, -2)$

$(-1, -1, 1, 0)$

$(1, -1, -1, 1)$

$(0, 1, -1, -1)$

$(-1, 0, -1, 1)$

$(1, -1, 0, -1)$

$24 = (8, 1) \oplus (1, 1) \oplus (1, 3) \oplus (3, 2) \oplus (\bar{3}, 2)$

$(24 = 8+1+3+6+6)$

SOTTOALGEBRE MASSIMALI

Una sottoalgebra (semi-sempl.) di un'alg. di Lie semplice di rango r ,
è una sottoalg. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ di rango r .

Possono essere ottenute prendendo il diagramma di Dynkin
esteso di \mathfrak{g} e rimuovendo un nodo. Il diagramma risultante
è il diagramma di Dynkin di una sottoalg. massimale.

Extended Dynkin diagrams:

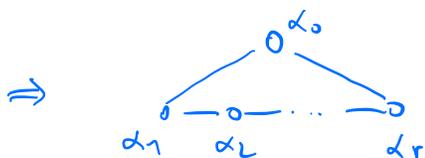
Dato il diagramma di Dynkin di \mathfrak{g} , il diagramma esteso
è ottenuto considerando meno l'highest root $\alpha_0 = -\theta$ e
aggiungendolo al Dynkin diagram come un nodo extra;
le inteset. (α_0, α_i) mi determinano a quali nodi venga collegato
e a quanti.

Es. A_r $\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_r \\ \circ & \circ & \dots & \circ \end{array}$ $\theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$

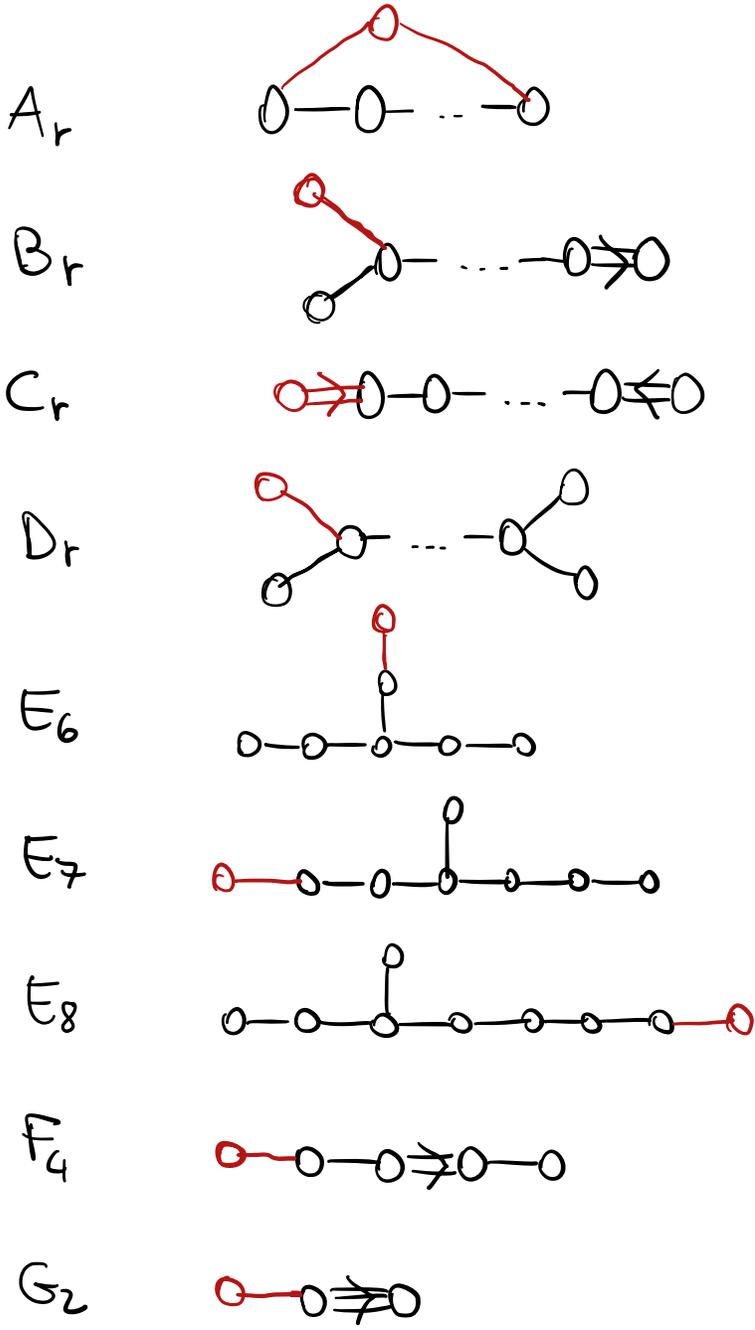
$$(\alpha_0, \alpha_1^\vee) = (\alpha_0^\vee, \alpha_1) = (-\theta, \alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1) = -2 + 1 = -1$$

$$(\alpha_0, \alpha_r^\vee) = (\alpha_0^\vee, \alpha_r) = (-\theta, \alpha_r) = (-\alpha_{r-1} - \alpha_r, \alpha_r) = 1 - 2 = -1$$

$$(\alpha_0, \alpha_j^\vee) = (\alpha_0^\vee, \alpha_j) = (-\theta, \alpha_j) = (-\alpha_{j-1} - \alpha_j - \alpha_{j+1}, \alpha_j) = 1 - 2 + 1 = 0 \quad j \neq 1, r$$

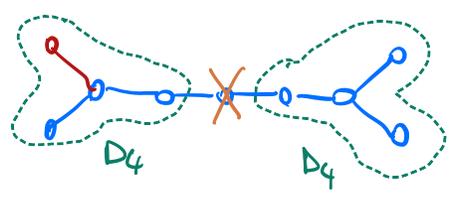


In modo analogo si ottengono tutti gli extended Dynkin diagrams:



Vediamo ora qualche esempio di sottoalgebra massimale.

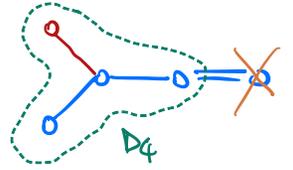
$so(16) > so(8) \oplus so(8)$
 $\quad \quad \quad \parallel$
 $D_8 > D_4 \oplus D_4$



Esponenziando otteniamo $SO(16) \supset SO(8) \times SO(8)$ che è facilmente verificabile da

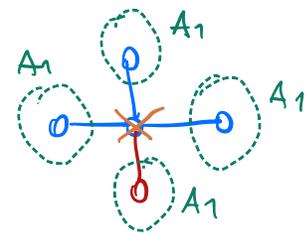
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in SO(16) \text{ se } A, B \in SO(8) : \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T A & \\ & B^T B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

- $so(9) \supset so(8)$
 $B_4 \supset D_4$



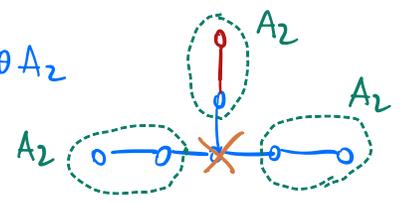
A livello di gruppi $\begin{pmatrix} A & | & \cdot \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in so(9)$ e $A \in so(8)$

- $D_4 \supset A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$
 \parallel
 $so(8) \supset so(4) \oplus so(4)$

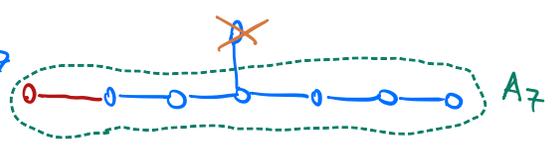


A livello di gruppi e carichi:
 $so(8) \supset so(4) \times so(4)$

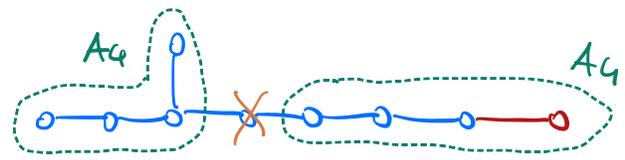
- $E_6 \supset A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$



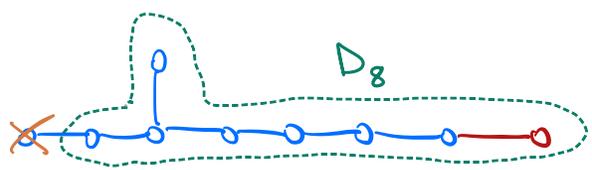
- $E_7 \supset A_7$



- $E_8 \supset A_4 \oplus A_4$



- $E_8 \supset D_8 \cong so(16)$



- $D_8 \supset D_4 \oplus D_4 \supset A_1 \oplus A_1$
 $\Rightarrow A_1^{\oplus 8}$ è anche una sottolgr. massimale di $D_8 \cong so(16)$
ovvero $so(16) \supset su(2)^{\oplus 8} \cong so(4)^{\oplus 4}$.

In termini di gruppi $so(16) \supset so(4) \times so(4) \times so(4) \times so(4)$.

Quest'ultimo esempio mostra come una sottolgr. massimale può essere franta come sottolgr. massimale di una sottolgr. massimale.