Geometria affine dello spazio

Sia $S \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ un sottospazio affine, allora

$$\dim S \begin{cases} 0 \Rightarrow S \text{ è un punto} \\ 1 \Rightarrow S \text{ è una retta} \\ 2 \Rightarrow S \text{ è un piano} \\ 3 \Rightarrow S = \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

Consideriamo il caso $\dim S = 1$. Sia W la giacitura di S. Allora $\dim W = 1$, quindi $W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}\right)$ con $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Se $Q \in S$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$, allora S ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = q_1 + l \cdot t \\ y = q_2 + m \cdot t \\ z = q_3 + n \cdot t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

infatti se $P = (x, y, z)$ è un generico punto di S, allora $\overrightarrow{QP} \in W$, ovvero

$$\begin{pmatrix} x - q_1 \\ y - q_2 \\ z - q_3 \end{pmatrix} \in \text{span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}\right)$$

Per le equazioni cartesiane di S, consideriamo la matrice

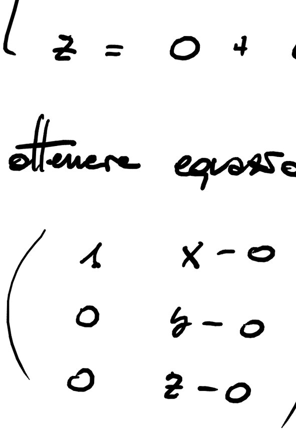
$$\begin{pmatrix} l & x - q_1 \\ m & y - q_2 \\ n & z - q_3 \end{pmatrix}$$

e imponiamo che essa abbia rango 1. Per farlo, la portiamo a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \boxed{*} \\ 0 & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

imponiamo che queste due espressioni di grado 1 in x, y, z siano nulle.

<u>Esempio</u>: consideriamo uno degli assi coordinati



ovvero consideriamo la retta passante per $O = (0,0,0)$ e parallela a $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

le sue equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t \\ y = 0 + 0 \cdot t \\ z = 0 + 0 \cdot t \end{cases}$$

per ottenere equazioni cartesiane consideriamo

$$\begin{pmatrix} 1 & x - 0 \\ 0 & y - 0 \\ 0 & z - 0 \end{pmatrix}$$

questa matrice è già a scala e quindi per imporre che abbia rango 1 dobbiamo imporre

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{equazioni cartesiane della retta}$$

Anche in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, come in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, per due punti passa una e una sola retta, se sono distinti. Supponiamo dunque che $Q, R \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, $Q \neq R$:

$$Q = (q_1, q_2, q_3) \qquad R = (r_1, r_2, r_3)$$

Come analizzato per le rette nel piano, se S è la retta per Q ed R e W è la sua giacitura allora $\overrightarrow{QR} \in W$, $\overrightarrow{QR} \neq 0$, e $\dim W = 1$, quindi $W = \text{span}(\overrightarrow{QR})$.

Dunque equazioni parametriche della retta S per Q ed R sono:

$$\begin{cases} x = q_1 + (r_1 - q_1) \cdot t \\ y = q_2 + (r_2 - q_2) \cdot t \\ z = q_3 + (r_3 - q_3) \cdot t \end{cases}$$

Se ora volessimo equazioni cartesiane ragioniamo come prima.

Se invece partissimo da equazioni cartesiane della retta:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

(che sono tali che $\text{rg}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} = 2$)

allora per ottenere equazioni parametriche non facciamo altro che esprimere la generica soluzione del sistema precedente in termini di un parametro libero.

<u>Esempio</u>: consideriamo la retta in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

per determinare equazioni parametriche risolviamo il sistema lineare:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

risolviamo applicando l'algoritmo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

ovvero

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ y - z = 1/3 \end{cases}$$

una soluzione particolare è:

$$x = 8/3 \qquad y = 1 \qquad z = 2/3$$

il sistema lineare omogeneo associato è equivalente a:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

la cui generica soluzione è della forma $\begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

in definitiva, le equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = 8/3 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2/3 + t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo ora $S \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ con $\dim S = 2$, ovvero un piano. Dunque S è determinato da un punto $Q \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ e da una giacitura $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di dimensione 2:

$$Q = (q_1, q_2, q_3) \quad \text{e} \quad W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}\right)$$

con $\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$ linearmente indipendenti.

La condizione precedente sui due vettori si può esprimere come:

$$\text{rg}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Come per le rette da questa descrizione otteniamo equazioni parametriche per il piano: se $P = (x, y, z)$, allora $P \in S$ se e solo se

$$\overrightarrow{QP} \in W \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{QP} \in \text{span}\left(\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}\right)$$

$\Leftrightarrow$ esistono $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\overrightarrow{QP} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - q_1 \\ y - q_2 \\ z - q_3 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad \text{per certi } t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Quindi le equazioni parametriche di S sono

$$\begin{cases} x = q_1 + l_1 \cdot t_1 + l_2 \cdot t_2 \\ y = q_2 + m_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2 \\ z = q_3 + n_1 \cdot t_1 + n_2 \cdot t_2 \end{cases}$$

Se dalle equazioni parametriche vogliamo passare a quelle cartesiane, consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x - q_1 \\ m_1 & m_2 & y - q_2 \\ n_1 & n_2 & z - q_3 \end{pmatrix}$$

e imponiamo che abbia rango 2. Per farlo, ci sono due modi:

A) Utilizzando l'algoritmo di Gauss, portiamo la matrice nella forma a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

imponiamo che questa espressione in x, y, z sia zero.

B). Ricordando che la matrice

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 (perché $\dim W = 2$), allora

$$\text{rg}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x - q_1 \\ m_1 & m_2 & y - q_2 \\ n_1 & n_2 & z - q_3 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & x - q_1 \\ m_1 & m_2 & y - q_2 \\ n_1 & n_2 & z - q_3 \end{pmatrix} = 0$$