FORME REALI per ALG. di LIE

Finora abbiamo studiato alg. di Lie complesse. Tuttavia in fisica siamo spesso interessati ai gruppi di Lie reali (come $SU(N)$, $SO(N)$, ...) e alle loro ALGEBRE DI LIE REALI.

- Dato uno sp. vett. V d-dimensionale, posso scegliere una base $\{e_i\}_{i=1,\dots,d}$, allora $V = \{\sum_i z_i e_i \mid z_i \in \mathbb{C} \; i=1,\dots,d\}$
  Restringendo la scelta delle z_i posso definire dei sottosp. vett.
  Per esempio: $z_i = 0 \; \forall i > 2 \to$ ottengo un sottosp. 2dim. di V come $V_2 = \{z_1 e_1 + z_2 e_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\} \subset V$.

- Sia V sp. vett. COMPLESSO di $\dim_{\mathbb{C}} V = d$ e $\{e_i\}_{i=1,\dots,d}$ una sua base. Esso può essere visto come uno sp. vett. REALE di $\dim_{\mathbb{R}} V = 2d$, definito come
  $$V = \{ \sum_i \underbrace{(R_i e_i + I_i (i e_i))}_{= z_i e_i \text{ con } z_i = R_i + i I_i} \mid R_i, I_i \in \mathbb{R} \; i=1,\dots,d \}$$

- Posso trovare un sottosp. vett. REALE di $\dim_{\mathbb{R}} = d$ di V imponendo una condizione di REALTÀ: $V_{\mathbb{R}} \subset V$ t.c. $V = V_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$
  La più semplice è $z_i \in \mathbb{R}$ (cioè $I_i = 0 \; \forall i$) oppure $z_i \in i\mathbb{R}$ (cioè $R_i = 0 \; \forall i$); ma possiamo anche imporre $z_i \in \mathbb{R}$ $i \leq k$ e $z_i \in i\mathbb{R}$ $i > k$; un'altra possibilità è $z_i = a_i + i a_i$; oppure $z_i = a_i + i b_i$ $1 \leq i \leq d$ e $z_i = a_i - i b_i$ $d+1 \leq i \leq 2d$.

- Data un'alg. di Lie COMPLESSA $\mathcal{G}$ con $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{G} = d$, una sua FORMA REALE è una sottoalg. $\mathcal{G}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{G}$ con $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{G}_{\mathbb{R}} = d$. Essa è uno sottosp. reale ottenuta attraverso una condizione di realtà; se tale condiz. di realtà è preservata dal prodotto di Lie, allora $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ è anche sotto-ALGEBRA di Lie.

- Nella base di Cartan-Weyl $\{H^i, E_\alpha\}$ le cost. di struttura sono REALI.

$\Longrightarrow$ possiamo fare combinaz. lineari REALI di H^i, E_α e i loro commutatori saranno ancora combinaz. reali.

Possiamo quindi def. la "SPLIT REAL FORM" di $\mathcal{G}$ come

$$\mathcal{G}_{\mathbb{R}} = \{ \ell^i H^i + \ell^\alpha E_\alpha \mid \ell^i, \ell^\alpha \in \mathbb{R} \quad i=1,\dots,r \quad \alpha \in \Delta \} \subset \mathcal{G}_{\mathbb{R}}$$

Per le algebre classiche:

	SPLIT REAL FORM
A_r	$sl(r+1, \mathbb{R})$
B_r	$so(r+1, r)$
C_r	$sp(2r, r)$
D_r	$so(r, r)$

$\rightarrow$ Queste algebre generano gruppi NON-compatti.

(Nei casi eccez. $e_{6(6)}$, $e_{7(7)}$, $e_{8(8)}$; nessun simb. per F_4, G_2)

$$[iH^i, J_1^\alpha] = \alpha(H^i)\, J_2^\alpha$$

• Possiamo invece prendere come base

$$iH^i \quad i=1,\dots,r \qquad J_1^\alpha \equiv \frac{E_\alpha + E_{-\alpha}}{\sqrt{2}\, i} \;, \quad J_2^\alpha \equiv \frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}} \qquad \alpha \in \Delta_+$$

e definire

$$g_\mathbb{R} = \{ \ell^i (iH^i) + \ell^\alpha J_1^\alpha + \tilde{\ell}^\alpha J_2^\alpha \mid \ell^i, \ell^\alpha, \tilde{\ell}^\alpha \in \mathbb{R} \;\; i=1,\dots,r \;\; \alpha \in \Delta_+ \} \subset g$$

$\longrightarrow$ anche in qto caso le cost. di struttura sono reali

$$[iH^i, J_1^\alpha] = \frac{1}{\sqrt{2}}[H^i, E_\alpha + E_{-\alpha}] = \alpha^i \frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}} = \alpha^i J_2^\alpha$$

$$[iH^i, J_2^\alpha] = \frac{i}{\sqrt{2}}[H^i, E_\alpha - E_{-\alpha}] = i\alpha^i \frac{E_\alpha + E_{-\alpha}}{\sqrt{2}} = -\alpha^i J_1^\alpha$$

$$[J_1^\alpha, J_2^\alpha] = \frac{1}{2i}[E_\alpha + E_{-\alpha}, E_\alpha - E_{-\alpha}] = \frac{-2}{2i}[E_\alpha, E_{-\alpha}] = i\,\frac{\alpha^i H^i}{|\alpha|^2} = \frac{\alpha^i}{|\alpha|^2}(iH^i)$$

Fissando normalizzaz. di $E_{\alpha+\beta}$ in modo opportuno, anche altre cost. di str. $\in \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ qte algebre generano gruppi COMPATTI : nella base data,

la Killing form è DEFINITA NEGATIVA

$$k(H^i, H^j) = \delta^{ij}, \quad k(H^i, E^\alpha) = 0 \quad e \quad k(E^\alpha, E^\beta) = \begin{cases} 0 & se \; \beta \neq -\alpha \\ \frac{2}{|\alpha|^2} & se \; \beta = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; k(iH^i, iH^j) = -\delta^{ij} \qquad k(H^i, J^\alpha_{1/2}) = 0$$

$$k(J_1^\alpha, J_1^\alpha) = -\frac{1}{2} k(E_\alpha + E_{-\alpha}, E_\alpha + E_{-\alpha}) = -k(E_\alpha, E_{-\alpha}) < 0 \;, \; etc.$$

$\rightarrow$ qta $g_\mathbb{R}$ è chiamata la COMPACT REAL FORM.

Vediamo perché il gruppo di Lie corrisp. è COMPATTO:

- definiamo nozione di Hermit. coniugato : $(H^i)^\dagger = H^i \quad (E_\alpha)^\dagger = E_{-\alpha}$
- estendiamo tale def. in g in modo anti-lineare: $(cX)^\dagger = c^* X^\dagger$
- nella base sopra: $(iH^i) = -(iH^i)$ e $(J^\alpha_{1/2})^\dagger = -J^\alpha_{1/2}$

$\rightsquigarrow$ abbiamo una base di $g_\mathbb{R}$ che è ANTI-HERMITIANA $\rightarrow$ tutti elem. di $g_\mathbb{R}$ sono anti-her.

- l'esponenziale di $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ genera un gruppo che è un sottogruppo del gruppo UNITARIO, che è compatto; siccome sottoinsiemi chiusi (da dim.) di compatti sono compatti, allora $G_{\mathbb{R}}$ gen. da $\exp \mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ è compatto.

ES. $SU(2)$ $\quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \quad J_1 = \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

RAPPRESENTAZIONI CONIUGATE

- Consideriamo un'algebra di Lie complessa $g_{\mathbb{C}}$.
  Scegliamo una forma reale $g_{\mathbb{R}} \subset g_{\mathbb{C}}$ t.c. $g_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

- Sia ρ_R una rap. di $g_{\mathbb{R}}$: $\rho_R : g_{\mathbb{R}} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$

- Possiamo definire due rappresentazioni a partire da ρ_R:

  1) la rap $\rho_R^\vee$: $g_{\mathbb{R}} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$
  $$x \mapsto \rho_R^\vee(x) = -\rho_R(x)^T$$

  2) la rap $\rho_{\bar{R}}$: $g_{\mathbb{R}} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$
  $$x \mapsto \rho_{\bar{R}}(x) = \rho_R(x)^*$$
  complesso coniugato della matrice

La 1) è quella che abbiamo chiamato rap. coniugata nelle alg. di Lie complesse; abbiamo già dim. che data una base t_R^a, $t_{R^\vee}^a \equiv -(t_R^a)^T$ soddisfa stesse regole di comm.

La 2) non definisce una rapp. per algebre COMPLESSE :
se def. $t_{\bar{R}}^a = (t_R^a)^*$ $\qquad \rho_{\bar{R}}(\ell^a T^a) = (\ell^a)^* \rho_{\bar{R}}(T^a) = (\ell^a)^* t_{\bar{R}}^a$
$\rightsquigarrow$ non è stessa comb. lineare di $\ell^a T^a$.

Però se $\ell^a \in \mathbb{R}$ (cioè ho una forma reale risp. base T^a), allora $\rho_{\bar{R}}(\ell^a T^a) = \ell^a \rho_{\bar{R}}(T^a)$ e inoltre le cost. di struttura sono reali perchè $[T^a, T^b]$ è comb. lin. di T^c con coeff. reali.

- Se l'algebra $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ è COMPATTA, per ogni R esiste una base di V_R t.c. i generatori sono anti-HERMITIANI (rep. unitarie del gruppo associato):

$$(t^a_R)^\dagger = -t^a_R \quad \Rightarrow \quad -(t^a_R)^T = (t^a_R)^* \Rightarrow \rho^\vee_R = \rho_{\bar{R}} .$$

Cioè c'è un solo tipo di rep. coniugata.

→ per es. gruppi $SU(N)$ sono compatti e le rep. coniugate di rep. di $SL(N,\mathbb{C})$ sono rep. complex coniugate per $SU(N)$.

- Per i gruppi di Lie G con alg. di Lie reali, possiamo quindi definire le rep. complex coniugate: $\rho_{\bar{R}}(g) = \rho_R(g)^*$ con $g \in G$

Es. $SU(2)$ $\quad R = 2$

$$g \in SU(2) : \quad \rho_R(g) = e^{i a^a \sigma^a / 2} \qquad (\sigma^a)^\dagger = \sigma^a$$

$$\rightarrow \quad \rho_{\bar{R}}(g) = \left(e^{i a^a \sigma^a/2}\right)^* = e^{-i a^a \sigma^{a*}/2}$$

R e $\bar{R}$ sono equivalenti, cioè $\exists$ isomorfismo ε t.c.

$$-\sigma^{a*} = \varepsilon\, \sigma^a\, \varepsilon^{-1} \qquad \text{con} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infatti $sl(2,\mathbb{C})$ ha una sola rep. 2-dim.

$\Rightarrow 2^\vee \cong 2$. Inoltre $SU(2)$ è compatto, quindi $\bar{2} \cong 2^\vee \cong 2$.

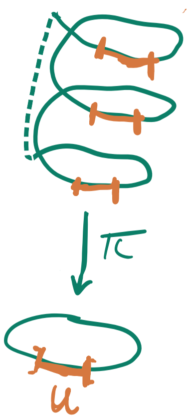
- Le algebre di Lie complesse e le loro forme reali hanno una nozione diversa di rappresentazioni:

  → le rep. di $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ devono essere $\mathbb{C}$-lineari.

  → le rep. di $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ devono essere $\mathbb{R}$-lineari.

UNIVERSAL COVER in group theory

- Dato un manifold M, il suo COVER(•) $\tilde{M}$ è un insieme tale che esiste una mappa $\pi : \tilde{M} \to M$ t.c. ogni pto di M ha un intorno $U \subset M$ t.c. $\pi^{-1}(U)$ è un'unione disgiunta di aperti in $\tilde{M}$. (•) In italiano "RICOPRIMENTO"



- Lo UNIVERSAL COVER (RICOPRIMENTO UNIVERSALE) è un ricoprimento SEMPLICEMENTE CONNESSO.

- Lo universal cover di un gruppo di Lie è ancora un gruppo di Lie.

$\Rightarrow$ Ad ogni alg. di Lie reale possiamo associare un gruppo di Lie SEMPLICEM. CONNESSO.

Es.
$su(N) \to SU(N)$ $\qquad$ $e_r \to E_r$
$so(N) \to Spin(N)$ $\qquad$ $f_4 \to F_4$
$sp(N) \to USp(2N)$ $\qquad$ $g_2 \to G_2$

CENTRO del gruppo &

diversi gruppi di Lie associati a stessa alg.

- Il centro di un gruppo G è def:

$$Z(G) = \{ z \in G \mid zg = gz \quad \forall g \in G \}$$

$g^{-1}zg = z \quad , \quad zgz^{-1} = g$

$\rightarrow Z(G)$ è un sottogruppo abeliano di G (si dim. essere gruppo FINITO)

- Gli elementi di $Z(G)$ commutano con tutti gli elem. di G
  $\Longrightarrow$ per Schur, nelle rep. irriducibili essi sono rappresentati da matrici proporzionali all'identità.

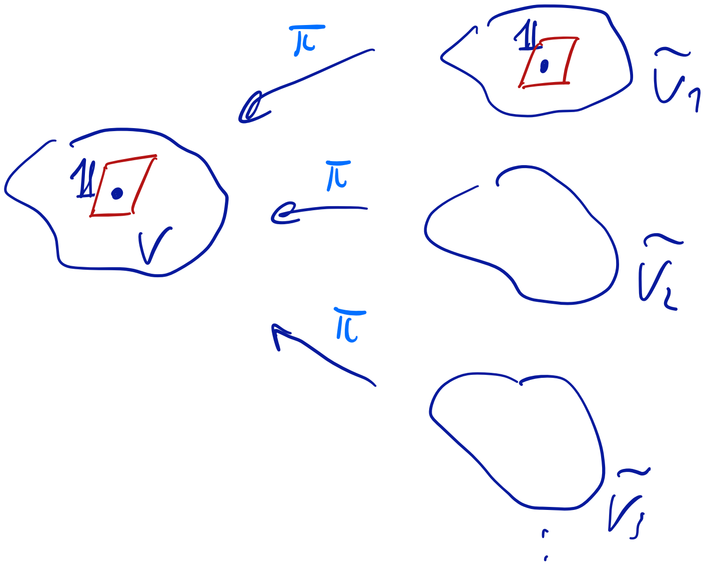
  - Per irrep. unitarie: $\rho(z) = e^{i\theta_z} \mathbb{1}_{d_R}$
    $\rightarrow$ qto fornisce un omomorfismo di gruppo da $Z(G)$ a $U(1)$:
    $$\mathrm{Hom}(Z(G), U(1)) \equiv \hat{Z}(G) \quad \text{"Pontryagin dual"}$$
    $\hookrightarrow \cong Z(G)$ poiché $Z(G)$ gruppo finito

- $Z(G) \subset G$ è un sottogruppo NORMALE.
  $\Rightarrow G/\Gamma$ è un gruppo con $\Gamma \subseteq Z(G)$
  Tale gruppo NON è semp. connesso.

Per es., $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$ $\quad$ $\left(SO(N) = Spin(N)/\mathbb{Z}_2 \right)$

- I gruppi G/Γ con $\Gamma \subseteq Z(G)$ hanno tutti le stesse algebra di Lie.

Infatti, sono tutti ricoprimenti l'uno dell'altro.



$$T_{\mathbb{1}} G \cong T_{\mathbb{1}} \tilde{G}$$

I centri dei gruppi semplicem. connessi sono

G	$Z(G)$	
$SU(N)$	$\mathbb{Z}_N$	
$Spin(N)$	$\mathbb{Z}_2$	$N = 1,3 \mod 4$
	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$N = 0 \mod 4$
	$\mathbb{Z}_4$	$N = 2 \mod 4$
$USp(2N)$	$\mathbb{Z}_2$	
E_6	$\mathbb{Z}_3$	
E_7	$\mathbb{Z}_2$	
E_8	$\{\mathbb{1}\}$	
F_4	$\{\mathbb{1}\}$	
G_2	$\{\mathbb{1}\}$	

Dal fatto che le alg. di Lie sono isomorfe, possiamo identificare i seguenti gruppi sempl. connessi:

$$Spin(3) = SU(2)$$
$$Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$$
$$Spin(5) = USp(4)$$
$$Spin(6) = SU(4)$$