Lezione 34 - 27/11/2025

"STUDI DI FUNZIONE"

def. sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, sia $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty \ (-\infty)$

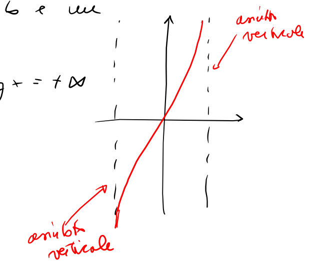
allora diremo che la retta di eq. $x=b$ è un asintoto verticale

es. $tg:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tg\, x = +\infty$

$x=\frac{\pi}{2}$ è asintoto verticale

(e anche $x=-\frac{\pi}{2}$)

(e analoghi con')



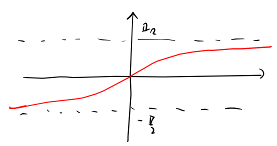
sia $f:]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

allora la retta di eq. $y=l$ si dice asintoto orizzontale

es. $arctg: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

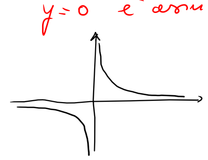
$\lim_{x\to+\infty} arctg\, x = \frac{\pi}{2}$

$y=\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale (analogo a $-\infty$)



es $\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \frac{1}{x}$

$y=0$ è asintoto orizzontale (sia a $+\infty$ che a $-\infty$)



sia $f:]a,+\infty[\to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ (-\infty)$

supponiamo che esistano $m,q \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(mx+q) = 0$$

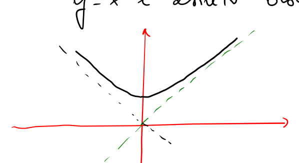
la retta $y=mx+q$ si dice asintoto obliquo (a $+\infty$)

es. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\sqrt{x^2+1}$

si vede che $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

$y=x$ è asintoto obliquo (a $+\infty$)



$y=-x$ è asintoto obliquo a $-\infty$

oss. come fare per capire se una funzione ha un asintoto obliquo.

oss. come fare per capire se una funzione ha un asintoto obliquo.

c'è un asintoto obliquo?

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $(o\ -\infty)$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

considero

se questo limite non esiste o vale $+$ o $-\infty$

f non ha asintoto

se c'è l'asintoto obliquo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (mx+q) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-(mx+q)+(mx+q)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{mx+q}{x} = \underline{m}$$

3) se invece $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$

considero $\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$

se questo limite non esiste o vale $+\infty$ o $-\infty$

l'asintoto obliquo non c'è.

se invece $\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = q$

l'asintoto è $y = mx+q$.

esempio $f(x) = \frac{x^2+4}{x-2}$

vedere se ha un asintoto obliquo a $+\infty$

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{x-2} = +\infty$ potrebbe averlo

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+4}{x-2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{x(x-2)} = 1$

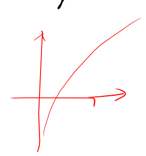
potrebbe averlo con $m = 1$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{x-2} - \overset{mx}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4-x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}+4-\cancel{x^2}+2x}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+4}{x-2} = 2$$

quindi $y = x+2$ è asintoto obliquo.



es. $\lg :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \lg x = +\infty$$

ha asintoto obliquo?

calcolo $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x} = 0$

potrebbe averlo ma $\lim_{x\to+\infty} \lg x - 0\cdot x$

$$\overset{q}{} \quad = \lim_{x\to+\infty} \lg x = +\infty$$

non ha asintoto.

Studio di funzione

data $f(x)$ cercare le caratteristiche di f per esempio, per disegnare il grafico nel modo più preciso possibile.

di solito si considera

1) dominio — insieme in $\mathbb{R}$ in cui ha senso considerare $f(x)$ ← è composta di funzioni elementari

1) bis ↖ caratteristiche particolari (simmetria, periodicità)

2) segno: valutare
$f(x) > 0 \; \ldots$
$f(x) = 0 \; \ldots$
$f(x) < 0 \; \ldots$
potrebbe essere necessario sospendere questa domanda e rinviarla alla fine.

3) limiti agli estremi del dominio

4) eventuali asintoti

5) derivata (1^a)

6) segno della derivata, intervalli di crescenza o decrescenza, massimi o minimi relativi o assoluti

7) derivata (2^a)

8) segno della derivata 2^a, intervalli di convessità e concavità, flessi) (lunedì)

9) grafico.

10) eventuale domanda finale

Esempi. si dica al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ quante sono le soluzioni di $\lambda x = (\lg x)^2$

Studio $f(x) = \dfrac{(\lg x)^2}{x}$

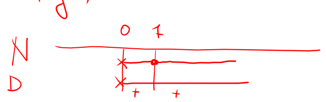
1) dominio $D =]0, +\infty[$ $(x > 0)$

2) segno $\dfrac{(\lg x)^2}{x} > 0$ (sul dominio, $x > 0$)

$(\lg x)^2 > 0$ per $\lg x \neq 0$ per $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

$(\lg x)^2 = 0$ per $\lg x = 0$ per $x = 1$

$(\lg x)^2 < 0$ mai



$f(x) > 0$ per $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$
$f(x) = 0$ per $x = 1$
$f(x) < 0$ mai

3) limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\lg x)^2}{x} = +\infty \;, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\lg x)^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{\lg x}{\sqrt{x}}}_{\to 0} \; \underbrace{\frac{\lg x}{\sqrt{x}}}_{\to 0} = 0$$

4) $x = 0$ è asintoto verticale, $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$

5) derivata 1^a $\quad f(x) = \dfrac{(\lg x)^2}{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{2 \lg x \cdot \cancel{\frac{1}{x}} \cdot \cancel{x} - 1 \cdot (\lg x)^2}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{2 \lg x - (\lg x)^2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\lg x - (\lg x)^2}{x^2}$$

segno di f'

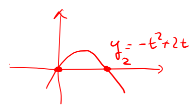
$$\frac{2\lg x - (\lg x)^2}{x^2} \quad \begin{matrix} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

solo $x > 0$ (dominio $x > 0$)

basta considerare $2\lg x - (\lg x)^2 > 0$ ($x^2 > 0$ nel dominio)

$\lg x = t \qquad 2t - t^2 > 0$

$y = -t^2 + 2t$

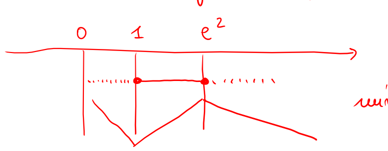


$0 < t < 2$

$f'(x) > 0$ per $\quad 0 < \lg x < 2 \quad 1 < x < e^2$

$f'(x) = 0$ per $\quad \lg x = 0 \vee \lg x = 2 \quad x = 1 \vee x = e^2$

$f'(x) < 0$ per $\quad \lg x < 0 \cup \lg x > 2 \quad 0 < x < 1 \vee x > e^2$

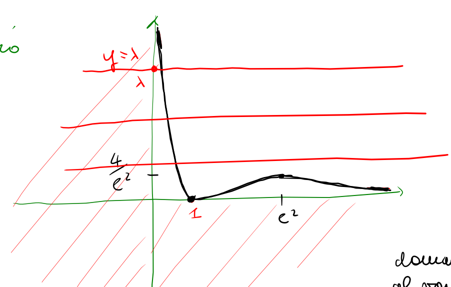


minimo in $x = 1$
$f(1) = 0$

massimo in $x = e^2$
$= f(e^2)$

$$\left.\frac{(\lg x)^2}{x}\right|_{x=e^2} = \frac{(\lg(e^2))^2}{e^2} = \frac{4}{e^2} = f(e^2)$$

grafico



($e \sim 2{,}7181$
$e^2 \sim 7{,}38$)

domanda
al variare di λ in $\mathbb{R}$
quante sono le soluzioni
di $\lambda x = (\lg x)^2$

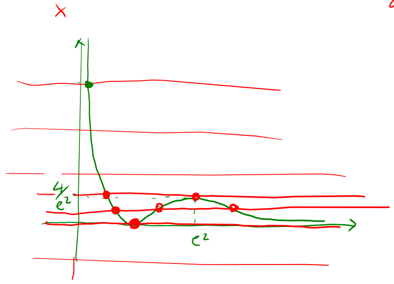
$\lambda x = (\lg x)^2$ (x è necessariamente > 0)

$\Updownarrow$

$\lambda = \frac{(\lg x)^2}{x}$

$\Updownarrow$

quante sono le soluzioni
di $\lambda = \frac{(\lg x)^2}{x}$
al variare di λ



se $\lambda > \frac{4}{e^2}$ 1 soluzione

se $\lambda = \frac{4}{e^2}$ 2 soluzioni

se $0 < \lambda < \frac{4}{e^2}$ 3 soluzioni

se $\lambda = 0$ 1 soluzione

se $\lambda < 0$ nessuna

Studiare la funzione $f(x) = 1-(x+1)e^{-x}$

- dominio $\mathbb{R}$
- segno $1-(x+1)e^{-x} > 0$? non lo so fare a questo punto.
- limiti

$$\lim_{x\to-\infty} 1 - \underbrace{(x+1)}_{-\infty}\underbrace{e^{-x}}_{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \underbrace{(x+1)}_{+\infty}\underbrace{e^{-x}}_{0} = 1$$

- asintoti

$\boxed{\text{asintoto orizzontale a } +\infty}$ $y=1$

e a $-\infty$? test asintoto obliquo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-(x+1)e^{-x}}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} - \underbrace{e^{-x}}_{+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{1} = -\infty$$

non c'è asintoto.

- derivata 1ª

$$\left(-(1+x)e^{-x}\right)' = -\left(e^{-x} + (1+x)e^{-x}(-1)\right)$$

$$= -e^{x} + (1+x)e^{-x}$$

$$= \cancel{-e^{-x}} + \cancel{e^{-x}} + xe^{-x}$$

$$f'(x) = xe^{-x}$$

$f'(x) = x e^{-x}$

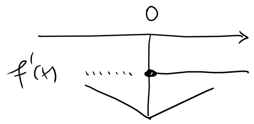
segno di $f'(x)$

$x \underbrace{e^{-x}}_{>0 \text{ sempre}} > 0$ $\qquad$ $f'(x)$ ha lo stesso segno di x

$f'(x) > 0$ per $x > 0$

$f'(x) = 0$ per $x = 0$

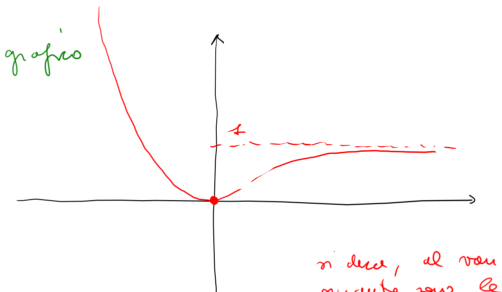
$f'(x) < 0$ per $x < 0$



f ha minimo in 0 e $f(0) = 1 - (0+1)e^0 = 1 - 1 = 0$

$f(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$

grafico



si deve, al variare di α in $\mathbb{R}$ quante sono le soluzioni di

$$\alpha = \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

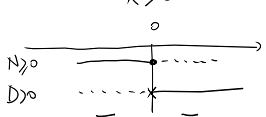
sugg. studiare brevemente $y = \frac{e^{-x}-1}{x}$ utilizzando lo studio precedente.

Studiamo $y = \frac{e^{-x} - 1}{x}$

dominio $\quad x \neq 0 \quad \mathbb{R} \setminus \{0\}$

segno $\quad N \geq 0 \quad e^{-x} - 1 \geq 0 \quad e^{-x} \geq 1 \quad -x \geq 0$

$\qquad D > 0 \quad x > 0 \qquad\qquad\qquad x \leq 0$



$f(x) < 0$ per $x < 0 \vee x > 0$ $\quad$ ($x = 0$ non è nel dominio)

limiti

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} \underset{x=-y}{=} \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{y}}{-y} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{x} \underset{x=-y}{=} \lim_{y \to 0^+} \frac{e^{y} - 1}{-y} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} - 1}{x} = 0$$

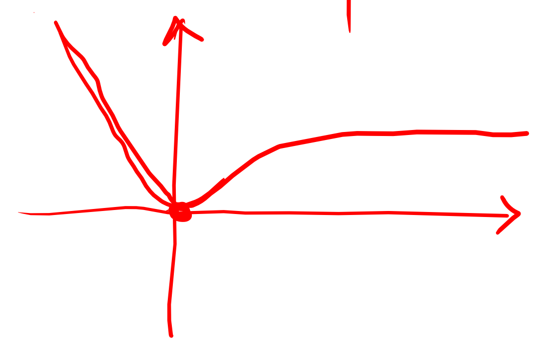
derivata 1ª $\quad f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot x - (e^{-x} - 1)}{x^2}$$

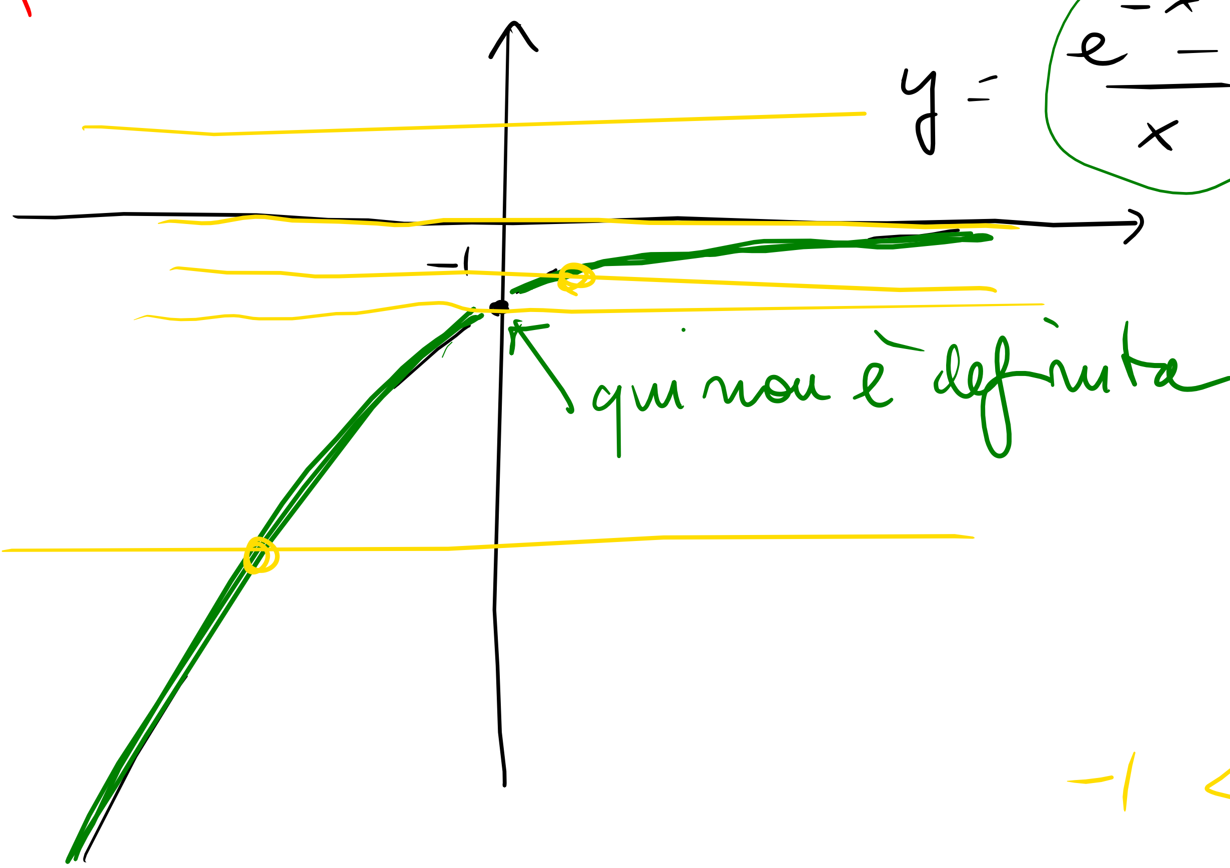
$$f'(x) = \frac{-e^{-x}\cdot x - (e^{-x}-1)}{x^2}$$

$$= \frac{1-(1+x)e^{-x}}{x^2}$$

è la funz. di prima



$$f'(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$



$$y = \frac{e^{-x}-1}{x}$$

$$\alpha = \frac{e^{-x}-1}{x}$$

$\alpha > 0$

$\alpha = 0$ nessuna

$-1 < \alpha < 0 \lor \alpha < -1$ 1 sol.

$\alpha = -1$ nessuna