

Tecnica delle Assicurazioni contro i Danni

Gianni Bosi

Indice

	<i>pag.</i>
1 Solvency II	3
1.1 Bilancio e solvibilità	3

CAPITOLO 1

Solvency II

1.1 Bilancio e solvibilità

IL bilancio della compagnia di assicurazioni, strutturato nella forma

assets/liabilities,

fornisce, in un certo istante $t \in \mathbb{R}_+$, tutte le *posizioni* della compagnia. Indichiamo con A_t il valore degli assets e con L_t quello delle liabilities. Ovviamente, nello spirito della teoria collettiva del rischio, dovrebbe risultare

$$A_t \geq L_t$$

in modo che tutte le liabilities siano coperte. Consideriamo il processo stocastico

$$\{R_t = A_t - L_t\}_{t \in \mathbb{R}_+} \quad (1.1.1)$$

che dovrebbe soddisfare, per una probabilità alta $1 - p \in]0, 1[$, la condizione

$$\mathbb{P} \left[\inf_{t \in \mathbb{R}_+} R_t \geq 0 \mid R_0 = r_0 \right] = \mathbb{P}_{r_0} \left[\inf_{t \in \mathbb{R}_+} R_t \geq 0 \right] \geq 1 - p.$$

Questo ci dice che la probabilità di rovina di questa compagnia è minore o uguale a p . Ovviamente, non è possibile richiedere la verifica in ogni istante e quindi la si effettua su una *griglia* $t \in \mathbb{N}$.

In realtà, si può fare più di questo.

1. *Problema monoperiodale.* Vogliamo verificare la condizione di solvibilità in $t = 0$, nello spirito della condizione (1.1.1). Supponiamo di aver

venduto solo contratti per coperture monoannuali, per i quali riceviamo il premio in $t = 0$ e (semmai) paghiamo l'indennizzo in $t = 1$. L'ammontare totale A_0 degli assets in $t = 0$ viene investito in modo da generare il valore A_1 in $t = 1$. Allora, nel problema monopersistente, la *condizione di non-rovina* si può formulare nel modo seguente:

Per una data ed elevata probabilità $1 - p \in]0, 1[$ il capitale iniziale r_0 e le strategie di investimento dovrebbero essere scelte in modo che risulti:

$$\mathbb{P}_{r_0}[A_1 - L_1 \geq 0] = \mathbb{P}_{r_0}[L_1 - A_1 \leq 0] \geq 1 - p. \quad (1.1.2)$$

Ovviamente, A_1 e L_1 non sono, in generale, indipendenti.

2. *Misura del rischio.* La condizione di non rovina (1.1.2) è descritta attraverso la misura di rischio value-at-risk $VaR_{1-p}(L_1 - A_1)$ al livello di sicurezza $1 - p \in]0, 1[$. Supponiamo di disporre di una misura di rischio ρ normalizzata, monotona e invariante per traslazioni. Allora, più in generale, il capitale iniziale r_0 e la strategia d'investimento dovrebbero essere tali che

$$\rho(L_1 - A_1) \leq 0. \quad (1.1.3)$$

Il Solvency II utilizza il VaR con livello di sicurezza $1 - p = 99,5\%$. L'aspetto più rilevante riguarda quindi la modellizzazione stocastica della posizione $L_1 - A_1$.

3. *valori market-consistent.* La difficoltà maggiore nelle considerazioni di solvibilità è la modellizzazione stocastica della posizione $L_1 - A_1$. Alcune posizioni in queta differenza sono scambiate a prezzi di mercato. Abbiamo bisogno di modellizzare i prezzi di mercato di queste posizioni al tempo 1, a partire dal tempo 0. Comunque, la maggior parte di queste posizioni debitorie non viene scambiata sul mercato. Per queste posizioni, abbiamo bisogno di determinare valori *market-consistent* del loro sviluppo stocastico. Possiamo separare le liabilities L_1 in due part:

- (a) pagamenti X_1 effettuati al tempo 1;
- (b) pagamenti in sospeso L_1^+ al tempo 1 (alla fine del primo anno di bilancio).

Quindi, le liabilities al tempo 1 sono date da

$$L_1 = X_1 + L_1^+.$$

La parte più facile è la modellizzazione di X_1 . Abbiamo bisogno di un modello stocastico in grado di predire i pagamenti in 1 e catturare le

relazioni con A_1 e L_1^+ . Molto più difficile è valutare L_1^+ . Questo ammontare dovrebbe riflettere un valore *market-consistent* dei pagamenti in sospeso al tempo 1. Osserviamo che tale valore differisce dalla riserva *best-estimate* $\mathcal{R}_1$ per due motivi essenziali:

- (a) la riserva *best-estimate* $\mathcal{R}_1$ è calcolata su base nominale, vale a dire ad essa non si applica alcuno sconto;
- (b) la riserva *best-estimate* $\mathcal{R}_1$ è un valore atteso, condizionato all'informazione $\mathcal{F}_1$ al tempo 1. Si tratta di un pagamento atteso, al quale si deve aggiungere un margine per ottenere un valore di mercato. In altri termini, L_1^+ dovrebbe riflettere un valore di trasferimento dei pagamenti in sospeso, al quale una parte terza è disposta ad accollarsi queste liabilities.

Riassumendo, L_1^+ dovrebbe rappresentare un prezzo (*valore di trasferimento*) al quale un'altra compagnia di assicurazioni sarebbe disposta ad assumersi le liabilities e a completare lo smontamento (*run-off*) di questi pagamenti in sospeso,

4. *Accettabilità e solvibilità.* Dobbiamo quindi modellizzare i blocchi A_1 , X_1 e L_1^+ . In questo ultimo punto, dobbiamo valutare la condizione di rischio (1.1.3). Se questa condizione è soddisfatta, allora la compagnia è solvibile al tempo 0 rispetto alla misura di rischio ρ ed il bilancio è accettabile.