Lezione 35 - 28/11/2025

LA "REGOLA DI DE L'HÔPITAL"

T. (caso $\frac{0}{0}$ in un punto di $\mathbb{R}$)

Siano $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$. f e g siano continue in $[a,b[$, derivabili in $]a,b[$

sia $\forall x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$

supponiamo che $\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$

se esiste $\boxed{\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ e vale } \ell}$ $\in \tilde{\mathbb{R}}$

allora esiste $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale ℓ.

dim. (tratto il caso $\ell \in \mathbb{R}$)

So che $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$

cioè $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \xi \in [a,b[$

$\xi \in]b-\delta, b[\Rightarrow \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell \right| < \varepsilon$

ho f, g definite in $[a,b[$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$

posso pensare che f e g sono anche definite in b e in b valgono 0

in questo modo f e g sono
- continue in $[a,b]$
- derivabili in $]a,b[$
- $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a,b[$

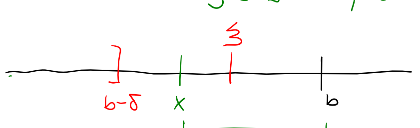
posso applicare il teorema di Cauchy a f e g.
e lo posso applicare a $f_{|[x,b]}$, $g_{|[x,b]}$ per ogni $x \in [a,b[$

Adesso scelgo $x \in]b-\delta, b[$ e applico Cauchy su $[x,b]$.

$\exists \xi \in]x,b[$ t.c. $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)}$

però $f(b) = g(b)$ $\qquad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{0 - f(x)}{0 - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$

però $x \in]b-\delta, b[$ e allora
anche $\xi \in]b-\delta, b[$



$\Rightarrow \xi \in]b-\delta, b[$

↑ qui sto applicando Cauchy

Allora $\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell \right| < \varepsilon$ ma $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}$

Allora $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| < \varepsilon$!!!

riassunto $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]a,b[$
$x \in]b-\delta, b[\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| < \varepsilon$ $\Big\}$ $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

come si usa?

1) devo calcolare $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

e ho $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

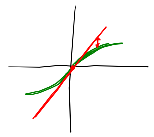
ho un caso $\frac{0}{0}$

2) provo a calcolare $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

se il secondo limite c'è, ho finito.

Attenzione se il secondo limite non esiste non è detto che il primo non esista

Esempi $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ $\quad \frac{0}{0}$



$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \left(= \frac{1}{6}\right) \quad \frac{0}{0}$

(se mi sono dimenticato il limite $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos}{x^2} = \frac{1}{2}$ potevo applicare di nuovo la regola di de l'H.)

$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \frac{1}{6}$

oss. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ $\quad$ sen x e x sono infinitesimi dello stesso ordine in 0

"$\operatorname{sen} x \sim x$ se x è piccolo"

"$\frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} \to \frac{1}{6}$"

$x - \operatorname{sen} x \sim \frac{x^3}{6}$

"$\operatorname{sen} x \sim x - \frac{1}{6}x^3$"

lunedì

• $\lim_{x\to 0} \frac{x - \lg(1+x)}{x^2}$ $\quad \frac{0}{0}$

$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}}{(1+x)\cdot 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}(1+x)} = \frac{1}{2}$

limite fondamentale

$\frac{\lg(1+x)}{x} \to 1$

"$\lg(1+x) \sim x$"

"$\lg(1+x) \sim x - \frac{1}{2}x^2$"

• $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ $\quad \frac{0}{0}$

$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$

Esercizi $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+\operatorname{sen} x)}{x\cos x}$

senza de l'Hôp. $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x \cos x} = 1$

con de l'Hôp.

$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\operatorname{sen} x} \cdot \cos x}{\cos x - x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)(\cos x - x\operatorname{sen} x)} = 1$

$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 2 + x}{\operatorname{sen}^2(\pi x)}$ $\quad \frac{0}{0}$

$\boxed{\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2} + 1}{2\operatorname{sen}(\pi x)\cdot \pi \cdot \cos(\pi x)} \quad \frac{0}{0}}$

$$\boxed{\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}+1}{2\sin(\pi x)\cdot \underbrace{\pi\cdot\cos(\pi x)}_{\to -\pi}} \qquad \frac{0}{0}}$$

$$= \frac{1}{-\pi}\cdot \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x^2-1}{x^2 \to 1}}{2\sin(\pi x)} = -\frac{1}{\pi}\cdot\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2\sin(\pi x)} \qquad \frac{0}{0}$$

$$\overset{H}{\Leftarrow} -\frac{1}{\pi}\cdot \lim_{x\to 1} \cdot \frac{\overbrace{2x}^{\to 2}}{2\underbrace{\cos(\pi x)}_{\to -1}\cdot\pi} = -\frac{1}{\pi^2}$$

senza usare de l'Hôpital

$x = y+1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-2+x}{\sin^2(\pi x)} \qquad x-1=y \qquad \begin{array}{l} x\to 1 \\ y\to 0 \end{array}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{y+1}-2+y+1}{\sin^2(\pi(y+1))} \qquad \frac{1-2(y+1)+(y+1)(y+1)}{y+1}$$

$$\cancel{1} - \cancel{2y} - \cancel{2} + y^2 + \cancel{2y} + \cancel{1}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{1+y}\cdot\frac{1}{\sin^2(\pi y)} \qquad \frac{1+y^2}{1+y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\pi^2 y^2}{\sin^2(\pi y)}\cdot\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+y} \qquad \sin^2(\pi y+\pi) \qquad \sin(\pi y+\pi)\cdot\sin(\pi y+\pi)$$

$$= \frac{1}{\pi^2}$$

ES. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg(1+e^{2x})}{x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$

la regola di de l'Hôpital vale anche nel caso $f,g: [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

$(g'(x)\neq 0\ \forall x)$ se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

T. siano $f,g: [a,b[\to \mathbb{R}$ continue su $[a,b[$, derivabili su $]a,b[$, $g'(x)\neq 0, \forall x$

(caso $\frac{\infty}{\infty}$)

sia $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = +\infty$

se $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste e vale $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$

allora $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste e vale ℓ

OSS. vale anche se $f,g: [a,+\infty[\to \mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg(1+e^{2x})}{x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^{2x}\cdot 2}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\underbrace{\frac{1}{e^{2x}}}_{\to 0}+1} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^{2x})}{x}$$

senza H. $\qquad \log(e^{y}) = y$

$$1+e^{2x} = e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)$$

$$\log(1+e^{2x}) = \log\left(e^{2x}\cdot\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)\right) = \log(e^{2x}) + \log(1+e^{-2x})$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^{2x})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\log(1+e^{-2x})}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2 + \underbrace{\frac{\log(1+e^{-2x})}{e^{-2x}}}_{\to 1}\cdot\frac{e^{-2x}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{e^{-2x}}{x} = 2$$

compito (gennaio 2025)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2+\operatorname{sen} x)}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(x+\cos x)} = +\infty$$

$x^2+\operatorname{sen}x \to +\infty$, $\operatorname{arctg}(x^2+\operatorname{sen}x)\to\frac{\pi}{2}$; $x+\cos x\to+\infty$, $\operatorname{arctg}(x+\cos x)\to\frac{\pi}{2}^-$; $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(x+\cos x)\to 0^+$

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt[3]{x^2(1+x)} = \lim_{x\to+\infty} x-\sqrt[3]{x^3+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \qquad \frac{1}{x}=t$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\sqrt[3]{1+t}}{t} \qquad \frac{0}{0} \qquad 1-(1+t)^{\frac{1}{3}}$$

$$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{t\to0^+} \frac{-\frac{1}{3}\cdot(1+t)^{-\frac{2}{3}}}{1} = -\frac{1}{3} \quad !!!$$

$(1+t)^{-\frac{2}{3}} \to 1$

alternativa $\qquad a-b = \dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

$$x-\sqrt[3]{x^3+x^2} = \frac{x^3-\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^3}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}-x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2}$$

$$= -\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\left(\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{-1}{1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2} \longrightarrow -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{-x-\frac{x^2}{2}-\log(1-x)}{\operatorname{sen} x^3} \qquad \frac{0}{0}$$

$$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x\to0} \frac{-1-x-\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}{(\cos x^3)\cdot 3x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1-x-\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}{(\cos x^3)\cdot 3x^2}$$

$$(-1-x)(1-x) = -(1-x^2) = x^2-1$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1-x+\frac{1}{1-x}}{3x^2}\cdot\frac{1}{\cos x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(-1-x)(1-x)+1}{3x^2(1-x)}\cdot\frac{1}{\cos x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}(1-x)}\cdot\frac{1}{\cos x^3} = \frac{1}{3}$$

$(1-x) \to 1$, $\cos x^3 \to 1$

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$$

$$\lg\sqrt{x} = \lg x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\lg x$$

$$= \lim_{x\to +\infty} e^{\sqrt[3]{x}\cdot\lg x} - e^{\sqrt{x}\cdot\lg\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} e^{\sqrt[3]{x}\cdot\lg x} - e^{\frac{\sqrt{x}}{2}\lg x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} e^{+\frac{\sqrt{x}}{2}\lg x}\left(e^{\sqrt[3]{x}\lg x-\frac{\sqrt{x}}{2}\lg x}-1\right)$$

$(= -\infty)$, $e^{+\frac{\sqrt{x}}{2}\lg x} \to +\infty$, $\sqrt[3]{x}\lg x-\frac{\sqrt{x}}{2}\lg x \to -\infty$, $e^{\dots} \to 0$, $\to -1$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x}\lg x - \frac{\sqrt{x}}{2}\lg x = -\infty$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \lg x\left(\sqrt[3]{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right) = -\infty$$

$\lg x \to +\infty$, $\sqrt[3]{x}-\frac{\sqrt{x}}{2} \to -\infty$

ES. Studiare la funzione $f(x) = x^2 - x + \lg(x+1)$

dire al variare di α in $\mathbb{R}$ quante sono le soluzioni di
$x^2 - x + \lg(x+1) = \alpha$

dominio $\quad x+1>0 \quad x>-1$

$D =]-1, +\infty[$

segno (vedo dopo)

limiti

$$\lim_{x\to -1^+} x^2 - x + \lg(x+1) = -\infty$$

$x^2 \to 1$, $x \to -1$, $\lg(x+1) \to -\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 - x + \lg(x+1) = +\infty$$

derivata $\quad f'(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(2x-1)(x+1)+1}{x+1}$

$$= \frac{2x^2+2x-x-\cancel{1}+\cancel{1}}{x+1}$$

$$= \frac{2x^2+x}{x+1}$$