

1

Data $h(x) \in L^1(\mathbb{R})$ con $\int dx h(x) \neq 0$, si consideri la successione

$$u_n(x) = \frac{nh(nx)}{\int dx h(x)} . \quad (1)$$

Si mostri che $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \delta(x)$ nel senso delle distribuzioni, dove $\delta(x)$ denota la delta di Dirac (o equivalentemente usando la notazione dei funzionali, che $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{u_n} = \delta_0$).

2

Si consideri la funzione di variabile reale

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} .$$

Si discuta in che senso sia possibile definirne la trasformata di Fourier. Dando per buono che la trasformata di Fourier è

$$\frac{C}{\sqrt{|k|}} ,$$

in che modo si può fissare la costante C senza calcolare esplicitamente la trasformata? Si consideri poi la funzione

$$f_\epsilon(x) = e^{-\epsilon|x|} \frac{1}{\sqrt{|x|}} ,$$

dove $\epsilon > 0$ è un parametro positivo. Se ne calcoli la trasformata di Fourier (è conveniente usare il cambio di variabili $x = s_+^2$ per $x > 0$ e $x = -s_-^2$ per $x < 0$). Si spieghi come utilizzare questo risultato per ottenere la trasformata di Fourier di $f(x)$.