

1 Dicembre

Espressioni di Hermite per funzioni razionali

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

1) Abbiamo considerato finora il caso $\deg P(z) < \deg Q(z)$

2) Ora consideriamo il caso $\deg P(z) \geq \deg Q(z)$

$$R(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} \stackrel{?}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

$\downarrow x \rightarrow +\infty$
1

$\downarrow$
0

Quando come in questo caso $\deg P(z) \geq \deg Q(z)$

si divide $P(z)$ per $Q(z)$, cioè c'è

un quoziente $q(z)$ ed un resto $r(z)$ tali che

$$P(z) = Q(z)q(z) + r(z)$$

$$\text{con } \deg r(z) < \deg Q(z)$$

$$R(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{x^3 + 1}{x(x-1)(x-2)}$$

$$R(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 3x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} =$$

$$\deg P(z) \geq \deg Q(z)$$

$$P(z) = Q(z)q(z) + r(z)$$

$$\deg(r(z)) < \deg Q(z)$$

$$= \frac{Q(z)q(z) + r(z)}{Q(z)} =$$

$$= q(z) + \frac{r(z)}{Q(z)}$$

$$x^3 + 1 = (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot 1 + (3x^2 - 2x + 1)$$

cioè dividendo $x^3 + 1 : x^3 - 3x^2 + 2x = 1$

con resto $3x^2 - 2x + 1$

$$R(x) = \frac{(x^3 - 3x^2 + 2x) + (3x^2 - 2x + 1)}{x^3 - 3x^2 + 2x} =$$

$$= 1 + \frac{3x^2 - 2x + 1}{x(x-1)(x-2)}$$

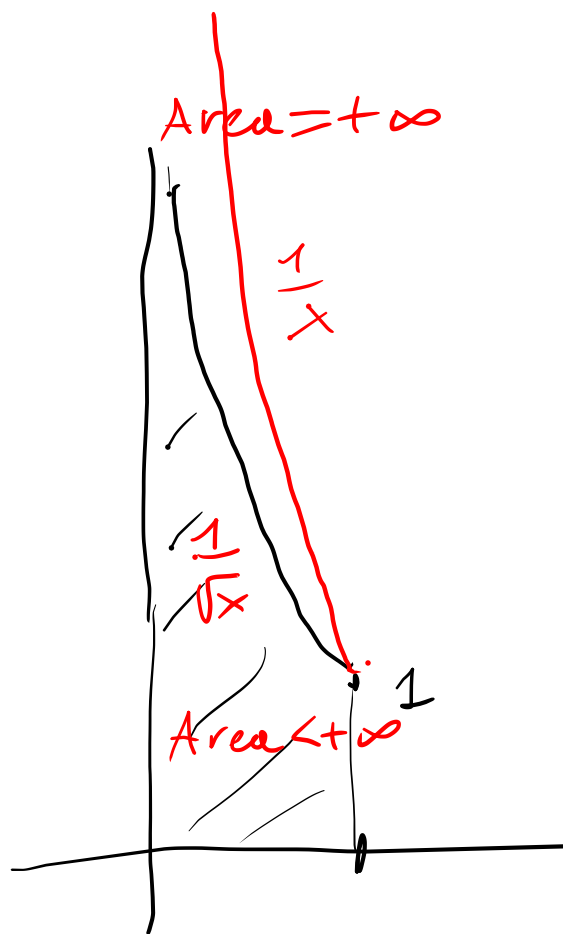
$$= 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

In teoremi generalizzati. Vogliamo dare un senso a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$$

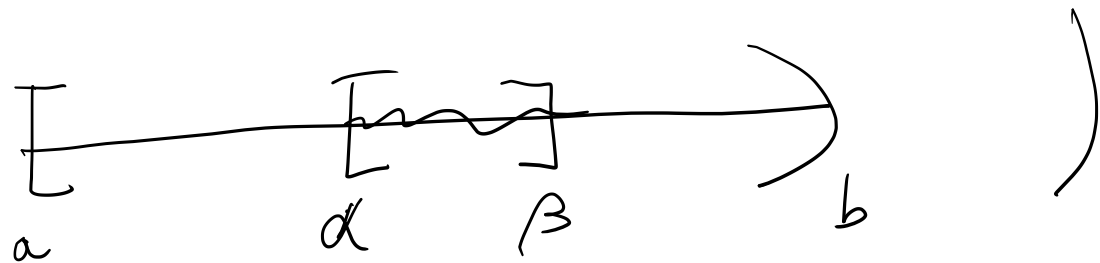
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$



$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ non esiste (oppure } = +\infty)$$

Def Sia $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrabile

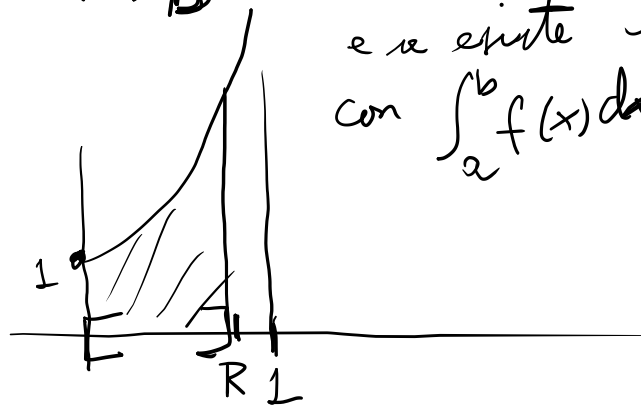
(cioè $\forall \alpha < \beta$ in $[a, b)$ si ha $f \in L[\alpha, \beta]$)



Diciamo che f è integrabile in senso generalizzato in $[a, b)$ se

$\lim_{R \rightarrow b^-} \int_a^R f(x) dx$ esiste (ed è finito)

e se esiste il limite lo denotiamo con $\int_a^b f(x) dx$



$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx =$$

$$= \lim_{R \rightarrow 1^-} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \in L_{loc}([0, 1)) ?$$

$$0 < R < 1$$

Esercizio se $f \in L[a, b]$ si ha anche

$f \in L[a, b)$ nel senso generalizzato?

E qual'è la relazione tra i due integrali?

Risposta Se $f \in L[a, b]$ allora

$$\lim_{R \rightarrow b^-} \underbrace{\int_a^R f(x) dx}_{F(R)} = F(b) = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{integrale di Darboux}}$$

con questo per via del teorema che
garantisce che se $f \in L_{\text{loc}}(I)$ allora

$$\int_{x_0}^x f(t) dt \in C^0(I) \quad (\text{qui } x_0 \in I \text{ fissato})$$

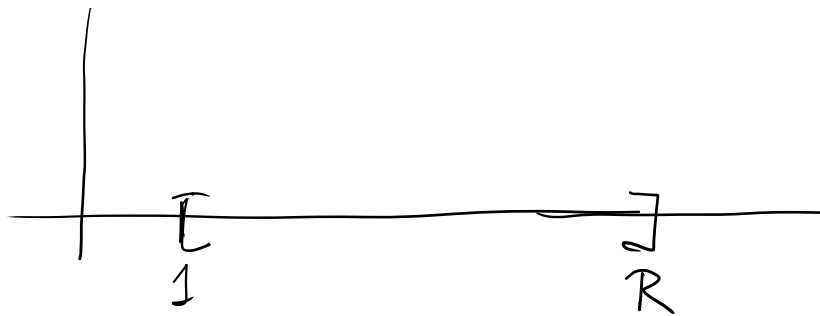
Così $f \in L[a, b]$ per Darboux $\Rightarrow f \in L[a, b)$ in
senso generalizzato con i due integrali uguali.

Teorema Si consideri x^{-p} in $[1, +\infty)$.

Allora $x^{-p} \in L[1, +\infty)$ se e solo se $p > 1$

Dim $p \neq 1$

$$\int_1^R x^{-p} dx =$$



$$= \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^R = -\frac{1}{-p+1} + \frac{R^{-p+1}}{-p+1}$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R x^{-p} dx = -\frac{1}{-p+1} + \frac{1}{-p+1} \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-p+1} = \begin{cases} \frac{1}{-p+1} & p > 1 \\ +\infty & p < 1 \end{cases}$$

f' integrabile con integrale $\frac{1}{p-1}$ solo se $p > 1$

Ora consideriamo $p=1$.

$$\int_1^R x^{-1} dx = \lg R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow x^{-1} \notin L[1, +\infty)$$

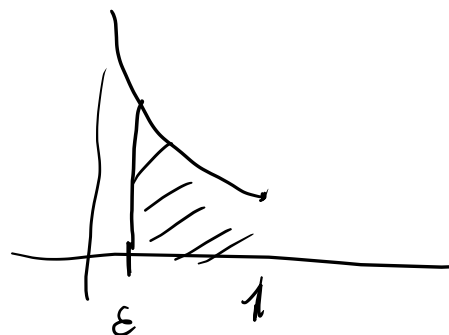
Abbiamo dimostrato che $x^p \in L[1, +\infty)$ se e solo se $p > 1$. $\square$

Teorema $x^{-p} \in L(0, 1]$ se e solo se

$$p < 1$$

Dim $p \neq 1$

$$\int_{\varepsilon}^1 x^{-p} dx = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_{\varepsilon}^1 =$$



$$= \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \varepsilon^{-p+1}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x^{-p} dx = -\frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-p+1} = \begin{cases} -\frac{1}{-p+1} & p < 1 \\ +\infty & p > 1 \end{cases}$$

$$p = 1$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x^{-1} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-\ln \varepsilon) = +\infty$$

Così abbiamo integrabilità solo per $p < 1$.

Teorema Siano $f, g \in L[a, b)$

1) (linearità)
Se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora

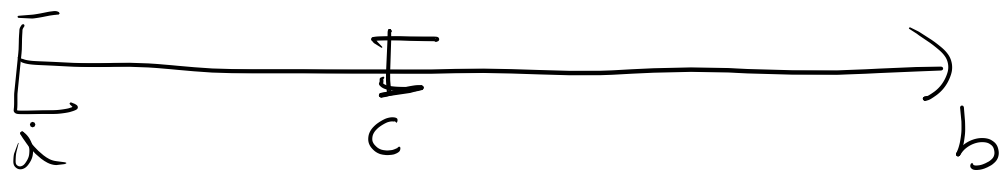
$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

2) (monotonia) Se $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b)$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

3) Se $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Teorema (Avt-avt)

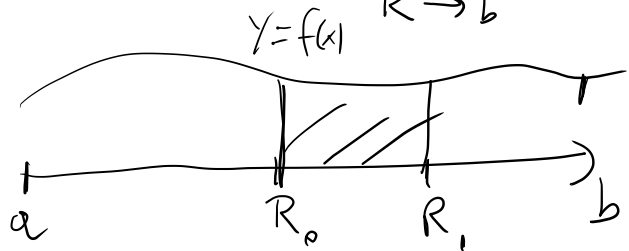
sia $f \in L_{loc} [a, b)$ con $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b)$.

Allora $\lim_{R \rightarrow b^-} \int_a^R f(x) dx$ esiste

ed è o un numero reale ≥ 0 oppure $+\infty$.

Dim Sia $F(R) = \int_a^R f(x) dx$. Dobbiamo

dimostrare che $\lim_{R \rightarrow b^-} F(R)$ esiste = $\begin{cases} \text{numero} \geq 0 \\ +\infty \end{cases}$



Siamo $a \leq R_0 < R_1 < b$

$$\text{Allora } F(R_1) = \int_a^{R_1} f(x) dx = \int_a^{R_0} f(x) dx + \underbrace{\int_{R_0}^{R_1} f(x) dx}_{\geq 0}$$

$$\geq \int_a^{R_0} f(x) dx = F(R_0)$$

$$\text{cioè } R_0 < R_1 \Rightarrow F(R_0) \leq F(R_1)$$

$$\lim_{R \rightarrow b^-} F(R) = \sup \{ F(R) : a \leq R < b \} \geq 0$$

Teorema (Confronto). Siano $f, g \in L_{loc}[a, b)$

$$\text{con } 0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b).$$

Allora $(g \in L[a, b) \Rightarrow f \in L[a, b))$ (*)

$$\left(\begin{array}{c} \updownarrow \\ f \notin L[a, b) \Rightarrow g \notin L[a, b) \end{array} \right)$$

Def $F(R) = \int_a^R f(x) dx \quad \forall a \leq R < b$

$$G(R) = \int_a^R g(x) dx$$

si che $\lim_{R \rightarrow b^-} G(R) \in [0, +\infty)$

Devo dimostrare che $\left(\lim_{R \rightarrow b^-} F(R) \right) \in [0, +\infty)$

Dal precedente teorema so che esiste ed è o un numero reale ≥ 0 oppure $+\infty$.

Poiché $f(x) \leq g(x) \quad \forall x$

$$F(R) = \int_a^R f(x) dx \leq \int_a^R g(x) dx = G(R)$$

$$F(R) \leq G(R) \quad \forall a \leq R < b$$

$$\lim_{R \rightarrow b^-} F(R) \leq \lim_{R \rightarrow b^-} G(R) < +\infty$$

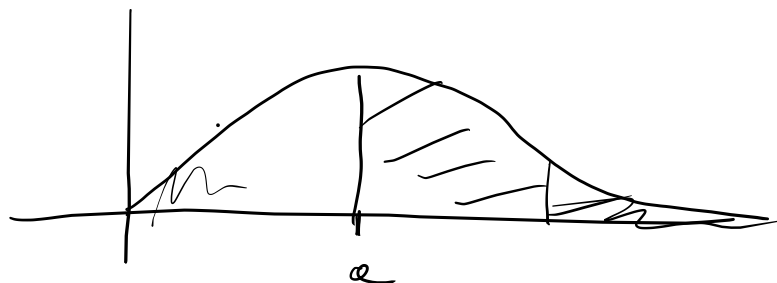
$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow b^-} F(R) < +\infty \Rightarrow f \text{ è integrabile}$$

ed inoltre $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Espr $\frac{x^3}{1+x^4} : \mathbb{R}^1$ integrable in $[0, +\infty)$?

Osserviamo che $\frac{x^3}{1+x^4} \in L[0, +\infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{1+x^4} \in L[a, +\infty) \quad \forall a > 0$$



$$\begin{aligned} a > 0 \quad \frac{x^3}{1+x^4} &= \frac{x^3}{x^4(1+x^{-4})} = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^{-4}}}_{\text{in } [a, +\infty)} \geq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+a^{-4}} \\ &\quad \notin L[a, +\infty) \\ &\quad a > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{1+x^4} \notin L[a, +\infty) \quad \forall a > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{1+x^4} \notin L[0, +\infty)$$