# Tutorato Analisi Matematica 1 - 2025/2026

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

## Tutorato 10 - Limiti e studi di funzione - 01/12/2025

## Richiamo - studio di funzione

Data la funzione $f(x)$, per studiarla determiniamo

i) Dominio $\text{dom} f$ (ricordando quando le varie funzioni elementari sono ben definite...)

ii) Segno, ovvero per quali $x \in \text{dom} f$ si ha $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) = 0$.
Se $0 \in \text{dom} f$, è utile valutare l'intersezione con l'asse $y$ calcolando $f(0)$.
Può essere utile verificare eventuali simmetrie di $f$
↳ se $f(-x) = f(x)$, $f$ è pari (sim. rispetto asse $y$); se $f(-x) = -f(x)$, $f$ è dispari (simm. rispetto origine)

iii) Limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui.
In alcuni casi particolari (ad esempio se $f$ è definita a tratti) dobbiamo anche identificare eventuali punti di discontinuità.
↳ N.B. $x_0$ può essere punto di discontinuità solo se $x_0 \in \text{dom} f$. Ad esempio il punto $x_0 = 0$ non è punto di discontinuità di $f(x) = \frac{1}{x}$, perché $0 \notin \text{dom} f$ (è vero però che $x = 0$ è as. verticale)

iv) Derivata prima $f'(x)$, ed eventuali punti di non derivabilità ($\in \text{dom} f$) in cui $f'$ non è ben definita. È utile calcolare limite destro e sinistro nei punti di non derivabilità per capire se sono punti angolosi, cuspidi, o punti a tangente verticale.
↳ N.B. Tenere sempre in mente che $f'(x_0)$ è la pendenza della retta tangente a $f(x_0)$.
↳ cioè il coeff. angolare

Segno di $f'$. Dove $f'(x) > 0 \to f$ è crescente, dove $f'(x) < 0 \to f$ è decrescente
dove $f'(x) = 0 \to f$ ha punto a tangente orizzontale, che spesso (ma non sempre, ad. $f(x) = x^3$) è max. o min. locale. Tenere in mente che anche i punti di non derivabilità possono essere max. o minimi locali (è il segno di $f'$ che conta!) → valutare $f$ nei max. e min. locali!

Se presenti, determinare max. e min. globali di $f$, confrontando max. e min. locali e i limiti agli estremi del dominio.

v) Derivata seconda $f''(x)$ e suo segno. Dove $f''(x)>0 \to f$ è convessa, dove $f''(x)<0 \to f$ è concava, dove $f''(x)=0 \to f$ ha un flesso, ovvero cambia di concavità.
↳ a meno che $f$ non sia una retta...

vi) Grafico qualitativo di $f$, in cui risultino tutte le informazioni trovate ai punti precedenti.

N.B. I punti ii) e v) (segno, intersezioni, simmetrie, derivata seconda) non sempre vengono richiesti.

# ESERCIZI

## Es. 1

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x-4}{x+8+|4-x|}$

## Es. 2

Calcolare i seguenti limiti con la regola di de l'Hopital

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} 2x}$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi 3^x)}{x}$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$

iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\log(1+3x))}{e^x - 3^x}$

v) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x}}$

vi) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$

## Es. 3 (5/02/2024, D)

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\tanh x) - 1}{\log(1+x^2)}$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^3 + e}{[\log(e^x+1)]^3}$

## Es. 4 (15/09/2024)

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sinh x) - \cosh(\arcsin x)}{7\arctan(x^2)}$

ii) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \frac{2n^2}{n+1}\left(\pi - 2\arctan(n)\right)$

# Svolgimenti

## Es. 1

$$f(x) = \frac{x-4}{x+8+|4-x|} = \begin{cases} \dfrac{x-4}{\cancel{x}+8+4-\cancel{x}} & \text{se } x \leq 4 \\[2ex] \dfrac{x-4}{x+8-4+x} & \text{se } x > 4 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x}{12} - \dfrac{1}{3} & \text{se } x \leq 4 \\[2ex] \dfrac{x-4}{2x+4} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

$\to$ ci rendiamo già conto che $f$ è una retta per $x \leq 4$ e un iperbole per $x > 4$, quindi potremmo già abbozzare un grafico... ma seguiamo tutti i passaggi.

i) Dominio

- Per $x \leq 4$ $f$ è ben definita.
- Per $x > 4$ richiediamo $2x+4 \neq 0 \to x \neq -2$, ma $-2 \notin (4, +\infty)$ quindi $f$ è ben definita anche per $x > 4$.

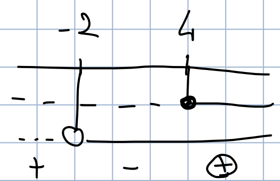
$\Rightarrow$ $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$

ii) Segno / inters.

- $x \leq 4$ : $f(x) = \frac{x}{12} - \frac{1}{3} \geq 0 \iff x \geq 4$

$\Rightarrow$ $f(x) < 0$ per $x < 4$ e $f(4) = 0$. Inoltre $f(0) = -\frac{1}{3}$.

- $x > 4$ : $\dfrac{x-4}{2x+4} \geq 0 \iff$




$\Rightarrow$ $f(x) > 0$ per $x > 4$

iii) Limiti / asintoti

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \ , \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{12} \ , \quad \lim_{x \to -\infty} \left[ f(x) - \frac{x}{12} \right] = -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ $y = \frac{x}{12} - \frac{1}{3}$ è as. obliquo a $-\infty$ (che coincide con $f$ stessa per $x \leq 4$!)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ è as. orizzontale a } +\infty.$$

iv) Derivata / derivabilità / crescenza / max. e min.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{se } x < 4 \\ \frac{\cancel{2x}+4-2(\cancel{x}-4)}{(2x+4)^2} & \text{se } x > 4 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{se } x < 4 \\ \frac{12}{(2x+4)^2} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

$f$ è derivabile in $x=4$? Calcoliamo limite destro e sinistro:

$$\lim_{x\to4^-} f'(x) = \lim_{x\to4^-} \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\lim_{x\to4^+} f'(x) = \lim_{x\to4^+} \frac{12}{(2x+4)^2} = \frac{12}{12^2} = \frac{1}{12}$$

→ sono finiti e coincidono, dunque $\exists \lim_{x\to4} f'(x) \Rightarrow f$ è derivabile in $x=4$.

devo farlo vedere nel grafico!

Risulta inoltre $f'(x)>0 \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ strettamente crescente $\forall x\in\mathbb{R}$.

Deduciamo infine che $f$ non ha né max. né min. locali o globali, e che $\frac{1}{2}$ è estremo superiore di $f$.

v) Derivata seconda / concavità / flessi

una retta è sia concava che convessa, ma non strettamente...

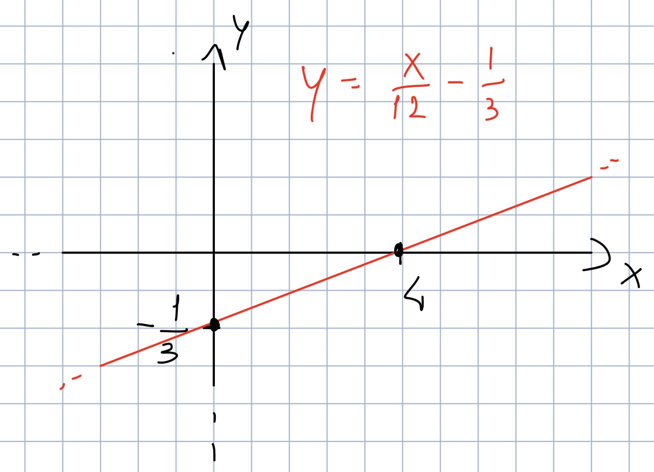
$$f''(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ 12 \cdot \frac{-2}{(2x+4)^3} \cdot 2 & x > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ -\frac{48}{(2x+4)^3} & x > 4 \end{cases}$$

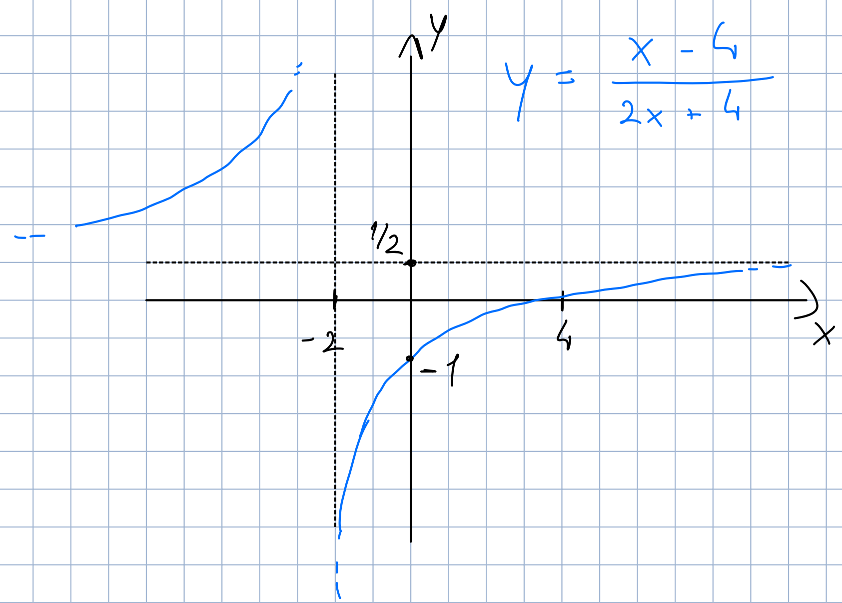
$f''(x)=0$ per $x<4$, $f''(x)<0$ per $x>4$ $\Rightarrow f$ concava $\forall x\in\mathbb{R}$ (no flessi)

Notiamo che $\lim_{x\to4^+} f''(x) \neq 0$, dunque $f''$ non è ben definita in $x=4$, ma questo non viene generalmente richiesto e non è necessario farlo vedere dal grafico...

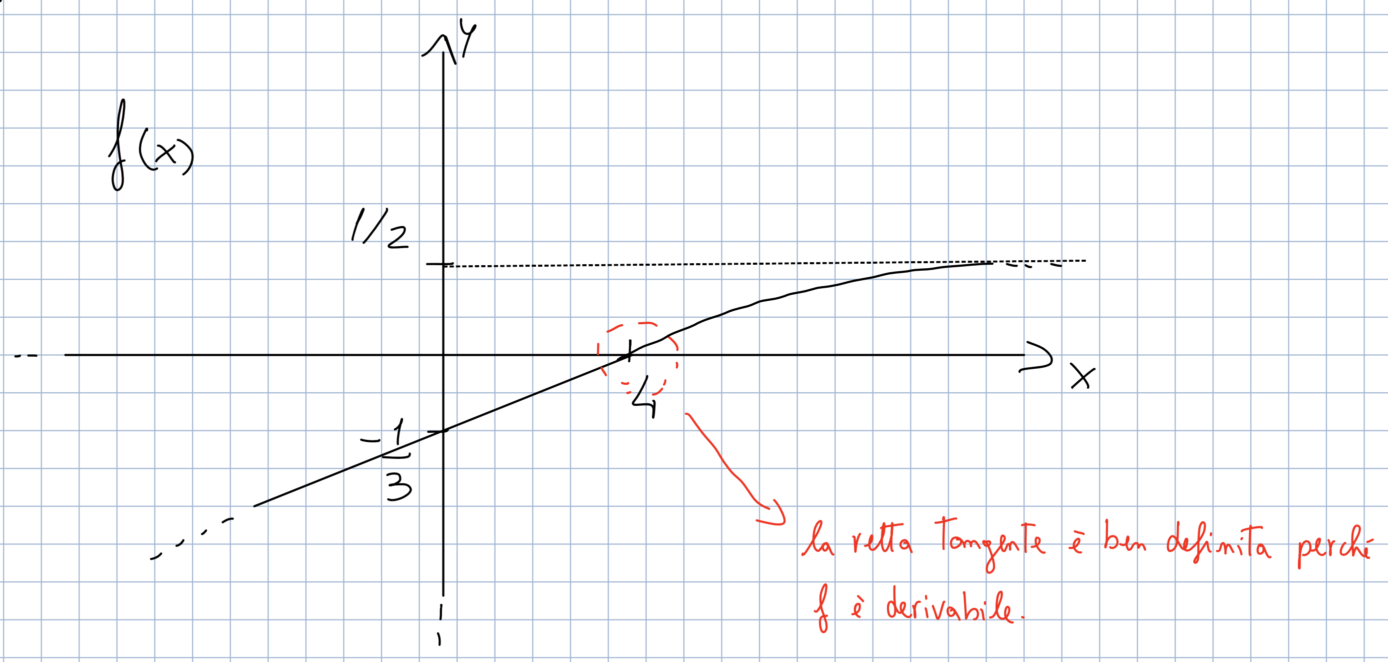
vi) Grafico qualitativo

↳ facile, perché sappiamo disegnare rette e iperboli. La cosa importante da far vedere è che i 2 pezzi si raccordano con derivabilità (no punti angolosi!) in $x = 4$.




Dunque $f$ è la retta per $x \leq 4$ e l'iperbole per $x > 4$



## Es. 2

per indicare che applichiamo l'Hopital, dunque scriviamo le derivate

i) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}x}}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$$

non più forma indeterminata, basta sostituire

ii) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi 3^x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\pi 3^x)\cdot\pi\cdot\log 3\cdot 3^x}{1} = \cos(\pi)\cdot\pi\cdot\log 3\cdot 1 = -\pi\log 3$$

iii) $$\lim_{x\to 0} (e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(e^x+x)}{x}}$$

Calcoliamo il limite dell'esponente: $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(e^x+x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

iv) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\log(1+3x))}{e^x-3^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\log(1+3x))\cdot\frac{3}{1+3x}}{e^x-\log 3\cdot 3^x} = \frac{\cos 0\cdot\frac{3}{1}}{1-\log 3} = \frac{3}{1-\log 3}$$

v) $$\lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{arcsen}x-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-2\sqrt{\cancel{1-x}}}{\sqrt{\cancel{1-x}}\cdot\sqrt{1+x}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

vi) $$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctan}x\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctan}x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

## Es. 3

i) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\tanh x)-1}{\log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{\log(1+x^2)}\cdot\frac{\cos(\tanh x)-1}{x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\underbrace{\frac{x^2}{\log(1+x^2)}}_{t=x^2}\cdot\underbrace{\frac{\cos(\tanh x)-1}{\tanh^2 x}}_{t=\tanh x}\cdot\underbrace{\left(\frac{\tanh x}{x}\right)^2}\right] = 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)} = 1 \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x} = 1$$

ii) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+e}{[\log(e^x+1)]^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+e}{[x+\log(1+e^{-x})]^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(3+\overbrace{\boxed{\frac{e}{x^3}}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^3}\left[1+\underbrace{\boxed{\frac{\log(1+e^{-x})}{x}}}_{\to 0}\right]^3} = 3$$

$$\log(e^x+1)$$
$$= \log(e^x(1+e^{-x}))$$
$$= \log(e^x)+\log(1+e^{-x})$$

## Es. 4

i) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{senh} x) - \cosh(\arcsin x)}{7\arctan(x^2)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{7\arctan(x^2)}\cdot\frac{\cos(\operatorname{senh} x) - \cosh(\arcsin x)}{x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{\arctan(x^2)}\cdot\left(\frac{\cos(\operatorname{senh} x)-1}{x^2} - \frac{\cosh(\arcsin x)-1}{x^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\left[\underbrace{\boxed{\frac{x^2}{\arctan(x^2)}}}_{\to 1}\left(\underbrace{\boxed{\frac{\cos(\operatorname{senh} x)-1}{\operatorname{senh}^2 x}}}_{\to -\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\operatorname{senh}^2 x}{x^2}}}_{\to 1} - \underbrace{\boxed{\frac{\cosh(\arcsin x)-1}{\arcsin^2 x}}}_{\to \frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\arcsin^2 x}{x^2}}}_{\to 1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{7}$$

ii) $$\lim_{n\to +\infty} \frac{2n^2}{n+1}\left(\pi - 2\arctan(n)\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2}{n+1}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

il Testo ci consiglia la formula
$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2\arctan(n) = \pi - 2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2}{n+1}\cdot\frac{\arctan(1/n)}{1/n}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2}{n^2+n}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\arctan(1/n)}{1/n}}}_{\to 1} = 4$$

perché

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$$