Lezione 36 - 1/12/2025

$f(x) = x^2 - x + \lg(x+1)$

dominio $D = \{x > -1\}$

segno ?

limiti $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

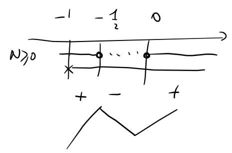
$f'(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(2x-1)(x+1) + 1}{x+1}$

$= \frac{2x^2 + 2x - x - \cancel{1} + \cancel{1}}{x+1} = \frac{2x^2 + x}{x+1}$

$N \geq 0 \quad 2x^2 + x \geq 0 \quad x_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad x(2x+1)$

$x \leq -\frac{1}{2} \ \cup \ x > 0$

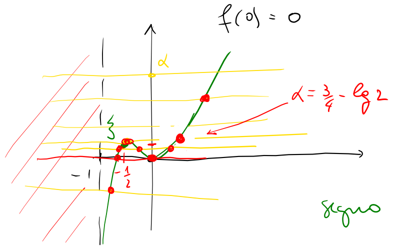
$D > 0 \quad x > -1$



max per $x = -\frac{1}{2}$

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \lg\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \lg 2 \sim 0{,}75 - 0{,}69 \sim 0{,}06$

$f(0) = 0$



$\alpha = \frac{3}{4} - \lg 2$

$\exists\, \xi \in \,]-1, -\frac{1}{2}[$ t.c. $f(\xi) = 0$?

segno
$f(x) < 0 \quad -1 < x < \xi$
$f(x) = 0 \quad x = \xi \lor x = 0$
$f(x) > 0 \quad \xi < x < 0 \cup x > 0.$

$x^2 - x + \lg(x+1) = 0$

Le derivate successive

def. sia $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo e f derivabile

Resta definita $f': I \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto f'(x)$ | la funzione derivata di f (la chiamo derivata 1ª)

Se f' è a sua volta derivabile dico $(f')'$ è la derivata 2ª di f e la indico con f''

Ho $f'': I \to \mathbb{R}$. Se f'' è a sua volta derivabile $(f'')' = f^{(3)}$ la chiamo derivata 3ª

e così via $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$

Se posso derivare fino alla k-esima volta parlo di derivata k-esima di f e si dice che f è derivabile fino all'ordine k

Se f è derivabile fino a qualunque ordine f indefinitamente derivabile.

Es. $f(x) = x^2 + x$
$f'(x) = 2x + 1$
$f''(x) = 2$
$f'''(x) = 0 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 0 \Rightarrow f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k \geq 4$

Es. $f(x) = \operatorname{sen} x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$

$f^{(3)}(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$

anche $\operatorname{sen} x$ è indef. derivabile

Es. $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

Es. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $\quad // \quad 2|x|$

è derivabile?

$f'(x) = \begin{cases} \boxed{2x \quad x>0} \\ \boxed{0 \quad x=0} \\ \boxed{-2x \quad x<0} \end{cases}$

ok perché x^2 e $-x^2$ sono derivabili e qui sono in punti interni al dominio in cui f coincide con x^2 o $-x^2$

$R_0^f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-0}{x} & \text{se } x>0 \\ \frac{-x^2-0}{x} & \text{se } x<0 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } x>0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases} = \begin{cases} |x| & x>0 \\ |x| & x<0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} |x| = 0$

quindi f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$

$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x>0 \\ \text{ma in 0 non c'è } f'' \text{ !!} \\ -2 & \text{se } x<0 \end{cases}$

conclusione: la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x>0 \\ 0 & \text{per } x=0 \\ -x^2 & \text{per } x<0 \end{cases}$

è derivabile fino al primo ordine ma non è derivabile fino al 2° ordine

def sia $f: I \to \mathbb{R}$, derivabile fino all'ordine k

se $f, f', f'', f''', f^{(4)}, \dots, f^{(k)}$ sono funzioni continue

f la diciamo di classe C^k

se f ha derivate di ogni ordine e sono tutte continue

si dice di classe C^∞.

FORMULA DI TAYLOR

Lemma (di Peano).

sia $f: I \to \mathbb{R}$, derivabile fino all'ordine k.

sia $x_0 \in I$

supponiamo che $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k)}(x_0) = 0$

Allora $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = 0}$

confronto tra f e la funzione $x \mapsto (x-x_0)^k$ che sono entrambe infinitesime.

f è un infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^k$

dim. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k}$ è un caso $\frac{0}{0}$ ← f è continua perché è deriv. e $f(x_0)=0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k}$$ ← è un caso $\frac{0}{0}$

uso la regola di de L'Hôpital

$$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{k(x-x_0)^{k-1}}$$ ← è un caso $\frac{0}{0}$

$$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{k(k-1)(x-x_0)^{k-2}}$$

$$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(3)}(x)}{k(k-1)(k-2)(x-x_0)^{k-3}}$$

$\vdots$

$$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(k-1)}(x)}{k(k-1)\dots(2)(x-x_0)^{k-(k-1)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{k!} \frac{f^{(k-1)}(x)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{k!} \left(\underbrace{\frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(x_0)}{x-x_0}}_{\text{è il rapporto incrementale di } f^{(k-1)} \text{ in } x_0} \right)$$

$$= \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) = 0$$

CVD

(ricordo che la regola di de l'Hôpital dice che

supponiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

e che si debba calcolare $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ← $\frac{0}{0}$ ($g'(x) \neq 0 \ \forall x$) deve valere

se so calcolare $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ e vale ℓ

anche $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste e vale ℓ

Lemma (di Lagrange)

sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile fino all'ordine $k+1$

supponiamo che $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(k)}(x_0) = 0$

Allora $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $\exists \xi \in \,]x_0, x[$ (oppure $]x, x_0[$)

tale che $$\frac{f(x)}{(x-x_0)^{k+1}} = \frac{1}{(k+1)!} \cdot f^{(k+1)}(\xi)$$

dim (cenno)

teo. di Cauchy applicato a f, $(x-x_0)^{k+1}$

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^{k+1}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^{k+1} - (x_0-x_0)^{k+1}} = \frac{f'(\xi_1)}{(k+1)(\xi_1 - x_0)^k} \quad \text{con } x_0 < \xi_1 < x$$

f', $(k+1)(x-x_0)^k$ Cauchy

$$= \frac{f''(\xi_2)}{(k+1) \cdot k (\xi_2 - x_0)^{k-1}} \quad \text{con } x_0 < \xi_2 < \xi_1 < x$$

$\vdots$

$$= \frac{f^{(k)}(\xi_k)}{(k+1)! \, (\xi_k - x_0)} = \frac{1}{(k+1)!} \frac{f^{(k)}(\xi_k) - f^{(k)}(x_0)}{(\xi_k - x_0)}$$

Lagrange

$$= \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi_{k+1})$$

con $x_0 < \xi_{k+1} < x$

CVD

Riassunto

$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(k)}(x_0) = 0$

Peano / Lagrange

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = 0$

$f(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$ con $x_0 < \xi < x$

$\exists \xi$

Teorema (formula di Taylor con resto di Peano)

sia $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ I intervallo,

sia $x_0 \in I$ e sia g derivabile fino all'ordine k

Allora $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$

$$g(x) = \underbrace{g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{polinomio di Taylor}} + \underbrace{r_k(x_0,x)}_{\text{resto nella forma di Peano}}$$

con $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{r_k(x_0,x)}{(x-x_0)^k} = 0}$

polinomio di Taylor (di grado k e relativo al punto x_0)

dim (cenno)

basta applicare il lemma di Peano

alla funzione

$$f(x) = g(x) - \left(g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)$$

- f è derivabile fino all'ordine k
- $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = g'(x_0) - g'(x_0) = 0$, $\dots$ $f^{(k)}(x_0) = 0$
- f è $r_k(x_0,x)$

Teorema (formula di Taylor con resto di Lagrange)

sia $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo

sia $x_0 \in I$, sia g derivabile fino all'ordine $k+1$

Allora $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $\exists \xi \in]x_0, x[$ (oppure $]x, x_0[$)

t.c.

$$g(x) = \underbrace{g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{polinomio di Taylor}} + \underbrace{\frac{g^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}}_{\text{resto nella forma di Lagrange}}$$

dim (cenno) basta applicare il lemma di Lagrange

Alla funzione

$$f(x) = g(x) - \left(g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)$$

CVD

¿ Come si usa ?

Es. $\lim_{x \to 0} \frac{\lg(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$ $\frac{0}{0}$

$$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + (x-1)(x+1)}{(1+x)\cdot 3x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} + \cancel{x^2} \cancel{x}}{(1+x)(3)\cdot \cancel{x^2}} = \frac{1}{3}$$

Es. $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$ $\frac{0}{0}$

$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + (x-1)(x+1)}{(1+x)\cdot 3x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x^2} - \cancel{1}}{(1+x)(3)\cdot \cancel{x^2}} = \frac{1}{3}$

alternativamente

Scrivo la formula di Taylor per $\lg(1+x)$ fino all'ordine 3, con il resto di Peano. $x_0 = 0$

$g(x) = \lg(1+x)$ $\quad x_0 = 0$, $k = 3$

$g'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$g''(x) = -1\cdot(1+x)^{-2}$

$g'''(x) = 2\cdot(1+x)^{-3}$

$g(0) = 0$

$g'(0) = 1$

$g''(0) = -1$

$g'''(0) = 2$

$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{g^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + r_3(x)$ con $\lim_{x\to x_0} \frac{r_3(x)}{(x-x_0)^3} = 0$

$= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + r_3(x)$ con $\lim_{x\to 0} \frac{r_3(x)}{x^3} = 0$

$= 0 + 1\cdot x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + r_3(x)$

$= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + r_3(x)$ con $\lim_{x\to 0} \frac{r_3(x)}{x^3} = 0$

abbiamo che

$$\boxed{\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + r_3(x) \quad \text{con } \lim_{x\to 0}\frac{r_3(x)}{x^3} = 0}$$

$\lg(1+x) - x + \frac{x^2}{2} = \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3} + r_3(x) - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}}$

$= \frac{x^3}{3} + r_3(x)$

$\lim_{x\to 0} \frac{r_3(x)}{x^3} = 0$

$\frac{\lg(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{r_3(x)}{x^3}$

$\frac{\lg(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} \to \frac{1}{3}$, $\quad \frac{1}{3} \to \frac{1}{3}$, $\quad \frac{r_3(x)}{x^3} \to 0$

Es Scrivere la formula di Taylor con resto di Peano per la funzione

$f(x) = e^x$ con $x_0 = 0$ $\quad$ k generico,

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = e^x$

$f(0) = 1$

$f'(0) = 1$

$\vdots$

$f^{(k)}(0) = 1$

$f(x) = e^x$ con $x_0 = 0$ le generico,

$$\begin{array}{l|l} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(k)}(x) = e^x & f^{(k)}(0) = 1 \end{array}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \text{resto}$$

$$e^x = 1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{k!}x^k + \text{resto}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{k!}x^k + r_k(x)$$

Peano

con $\lim_{x \to 0} \frac{r_k(x)}{x^k} = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(k+1)!}x^{k+1}$$

Lagrange,

ES. calcolare il valore di e

con un errore inferiore a 10^{-3}

$$\boxed{e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(k+1)!} \quad \text{con} \quad 0 < \xi < 1}$$