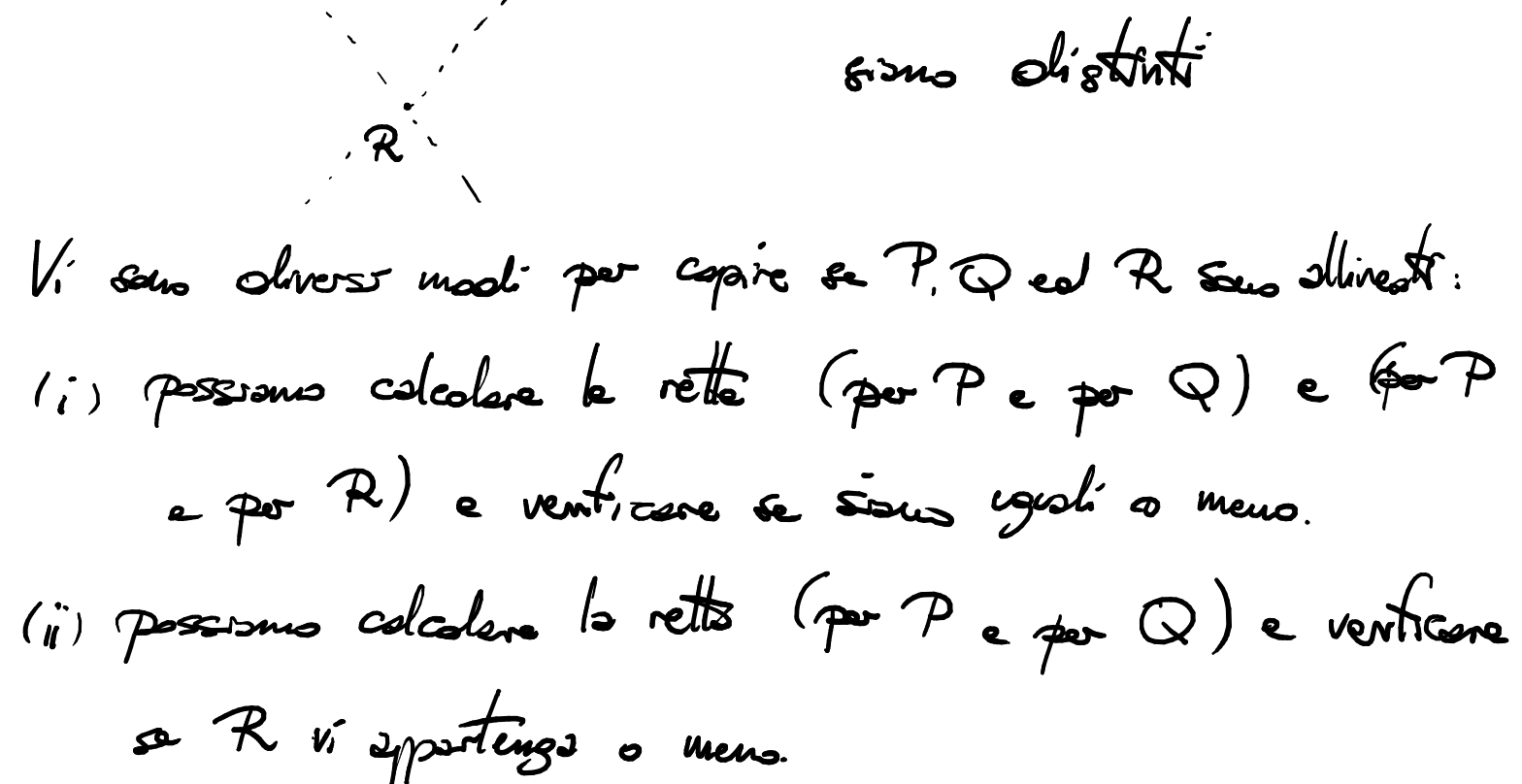


Per tre punti non allineati in A_R^3 passa uno e un solo piano.
 Cerchiamo di capire come verificare se tre punti sono allineati:



Vi sono diversi modi per capire se P, Q ed R sono allineati:

- (i) possiamo calcolare la retta (per P e per Q) e (per P e per R) e verificare se sono uguali o meno.
- (ii) possiamo calcolare la retta (per P e per Q) e verificare se R vi appartiene o meno.
- (iii) vale che P, Q ed R sono allineati se e solo se

$$\vec{PQ} \text{ e } \vec{PR} \text{ sono proporzionali tra loro (ovvero se sono linearmente dipendenti)}$$

Supponiamo ora che siano dati $P, Q, R \in A_R^3$ non allineati e calcoliamo l'unico piano per essi. Scriviamo

$$P = (p_1, p_2, p_3), \quad Q = (q_1, q_2, q_3), \quad R = (r_1, r_2, r_3)$$

Sia H il piano per essi e sia W la sua generatrice. Allora

$$\vec{PQ}, \vec{PR}, \vec{QR} \in W$$

Dato che i punti non sono allineati sappiamo che $\vec{PQ}$ e $\vec{PR}$ sono linearmente indipendenti, quindi:

$$\text{span}(\vec{PQ}, \vec{PR}) = W \quad \text{e} \quad \dim(\text{span}(\vec{PQ}, \vec{PR})) = 2$$

Essendo $\dim W = 2$ (perché H è un piano, vale che)

$$\text{span}(\vec{PQ}, \vec{PR}) = W$$

Quindi H è il piano passante per P (o per Q, o per R)

e di generatrice $\text{span}(\vec{PQ}, \vec{PR})$, quindi se equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = p_1 + (q_1 - p_1) \cdot t_1 + (r_1 - p_1) \cdot t_2 \\ y = p_2 + (q_2 - p_2) \cdot t_1 + (r_2 - p_2) \cdot t_2 \\ z = p_3 + (q_3 - p_3) \cdot t_1 + (r_3 - p_3) \cdot t_2 \end{cases}$$

Se $(x, y, z) \in A_R^3$, allora $(x, y, z) \in H$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \\ z - p_3 \end{pmatrix} \in \text{span}(\vec{PQ}, \vec{PR}) \iff \iff \begin{pmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 & x - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 & y - p_2 \\ q_3 - p_3 & r_3 - p_3 & z - p_3 \end{pmatrix} \text{ ha rango } 2$$

$$\iff \det(\text{precedente matrice}) = 0$$

In questo modo otteniamo equazioni cartesiane per H.

Discutiamo ora le possibili posizioni reciproche tra un piano e una retta. Se $L \in A_R^3$ è una retta di generatrice W

e $H \in A_R^3$ è un piano di generatrice Y, allora L e H sono paralleli se e solo se $W \in Y$. In altre parole se

$$W = \text{span}(w) \quad \text{e} \quad Y = \text{span}(v_1, v_2)$$

allora

$$L \text{ è parallelo a } H \iff W \in Y$$

$$\iff \text{span}(w) \in \text{span}(v_1, v_2)$$

$$\iff w \in \text{span}(v_1, v_2)$$

$$\iff w \text{ è combinazione lineare di } v_1 \text{ e } v_2$$

Se invece una retta $L \in A_R^3$ e un piano $H \in A_R^3$ non sono paralleli, si può mostrare (attraverso il teorema di Cramer) che L e H si intersecano in un unico punto.

Se abbiamo equazioni cartesiane di H ed L:

$$H: \quad ax + by + cz = d$$

$$L: \quad \begin{cases} \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = \beta_1 \\ \alpha_4 x + \alpha_5 y + \alpha_6 z = \beta_2 \end{cases}$$

allora l'unico punto di $L \cap H$ è ottenuto risolvendo il sistema lineare dato dalle tre equazioni. Se invece abbiamo equazioni cartesiane per H e parametriche per L:

$$H: \quad ax + by + cz = d$$

$$L: \quad \begin{cases} x = p_1 + t \\ y = p_2 + m \cdot t \\ z = p_3 + n \cdot t \end{cases}$$

allora per determinare $L \cap H$ possiamo sostituire nell'equazione cartesiana di H la parametrizzazione di L e risolvere l'equazione in t che otteniamo.

L'ultimo di argomento che affrontiamo della geometria affine dello spazio è quello dello scampamento.

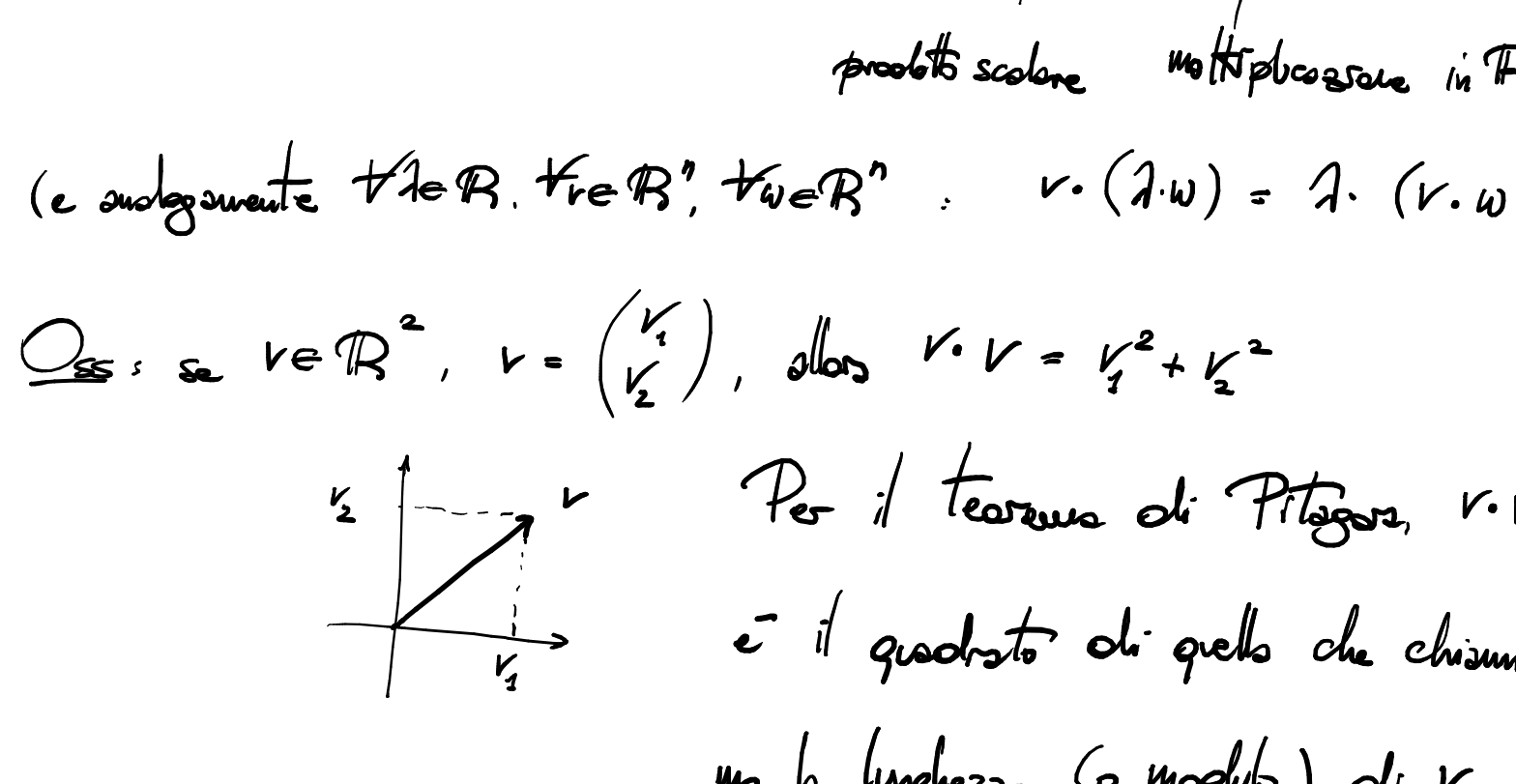
Def. due rette $r, s \in A_R^3$ si dicono scampanti se esiste un piano $H \in A_R^3$ tale che H le contenga entrambe, ovvero

$$r \in H \quad \text{e} \quad s \in H.$$

Ques. due rette $r, s \in A_R^3$ sono scampanti se e solo se

- sono incidenti, oppure
- sono parallele.

In particolare se le rette sono scampanti, allora esiste un unico piano passante per entrambe.



Determiniamo ora, date due rette scampanti, il piano che le contiene. Supponiamo che due rette r ed s siano incidenti, e siano

r: retta passante per Q e di generatrice $\text{span}(v)$

s: retta passante per Q' e di generatrice $\text{span}(v')$.

Notiamo che se $r \neq s$, allora essendo esse incidenti, $r \cap s = \{P\}$ e possiamo scegliere sia Q che Q' uguali a P. Inoltre, visto che $r \neq s$ ed r ed s non sono parallele, allora i vettori v e v' sono linearmente indipendenti.

Se H è il piano che contiene r ed s, allora vale che $P \in H$. Inoltre, se Y è la generatrice di H, allora $v, v' \in Y$, quindi

$$\text{span}(v, v') \in Y \implies \text{span}(v, v') = Y$$

(perché $\dim \text{span}(v, v') = 2$ e $\dim Y = 2$)

Pertanto H è il piano passante per P e di generatrice $\text{span}(v, v')$.

Se invece r ed s sono parallele, allora:

r: retta passante per Q e di generatrice $\text{span}(v)$

s: retta passante per Q' e di generatrice $\text{span}(v)$

Se $r \neq s$, allora esiste un unico piano H che le contenga entrambe. Se Y è la generatrice di H, allora $v \in Y$ e $\vec{QQ'} \in Y$ e dato che $r \neq s$ vale che v e $\vec{QQ'}$ sono linearmente indipendenti.

Quindi il piano H è il piano passante per Q (o Q') e di generatrice $\text{span}(v, \vec{QQ'})$.

Ritorniamo che due rette $r, s \in A_R^3$ sono scampanti se non sono incidenti e non sono parallele. Segue da ciò che non esiste un piano che le contenga entrambe. È vero però che esistono piani

$H_1, H_2 \in A_R^3$ paralleli tra loro e tali che $r \in H_1$ e $s \in H_2$. Per determinarli, notiamo che se

$$\text{span}(v) = \text{generatrice di } r$$

$$\text{span}(w) = \text{generatrice di } s$$

allora v e w sono linearmente indipendenti e quindi possiamo prendere

$$\text{generatrice di } H_1 = \text{generatrice di } H_2 = \text{span}(v, w)$$

Prodotto scalare

Leviamoci a $\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale a $\mathbb{R}$. Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$, ovvero

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

definiamo il prodotto scalare tra v e w come la quantità

$$v \cdot w = v_1 \cdot w_1 + \dots + v_n \cdot w_n$$

(anche $\langle v, w \rangle$)

Abbiamo pertanto definito una funzione

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \longmapsto v \cdot w$$

Si verifica che il prodotto scalare è bilineare:

$$\forall v, v' \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^n, \quad (v + v') \cdot w = (v \cdot w) + (v' \cdot w)$$

(e analogamente $\forall v \in \mathbb{R}^n$ e $\forall w, w' \in \mathbb{R}^n$, $v \cdot (w + w') = (v \cdot w) + (v \cdot w')$)

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda \cdot v) \cdot w = \lambda \cdot (v \cdot w)$$

(e analogamente $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^n$: $v \cdot (\lambda \cdot w) = \lambda \cdot (v \cdot w)$)

Ques. se $v \in \mathbb{R}^n$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, allora $v \cdot v = v_1^2 + \dots + v_n^2$

Per il teorema di Pitagora, $v \cdot v$

è il quadrato di quello che chiamiamo la lunghezza (o modulo) di v.

Def. sia $v \in \mathbb{R}^n$, definiamo la norma di v come

$$\|v\| := \sqrt{v \cdot v}$$

Notiamo che per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $v \cdot v \geq 0$, quindi la norma è ben definita.

Def. se $P, Q \in A_R^n$, definiamo la distanza tra P e Q come

$$d(P, Q) := \|\vec{PQ}\|$$

Teorema: (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

$\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ vale che

$$|v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

(prodotto scalare) (moltiplicazione in $\mathbb{R}$)

Cor. se $v, w \in \mathbb{R}^n$, allora

$$-\|v\| \cdot \|w\| \leq v \cdot w \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

se inoltre $v \neq 0$ e $w \neq 0$, allora $\|v\| > 0$ e $\|w\| > 0$

(infatti se $v \neq 0$, allora qualche $v_i \neq 0$ e quindi $v_1^2 + \dots + v_n^2 > 0$)

pertanto possiamo dividere per $\|v\| \cdot \|w\|$ e otteniamo

$$-1 \leq \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

dunque la quantità $\frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$ è il coseno di un angolo α

con $\alpha \in [0, \pi]$; otteniamo quindi l'angolo tra v e w come

quel numero $\alpha \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Ritornando, dato un prodotto scalare possiamo definire

- la norma dei vettori (e quindi la distanza tra punti)
- l'angolo tra vettori non nulli.

Ques. l'angolo tra v e w è $\frac{\pi}{2}$ se e solo se:

$$\frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \iff v \cdot w = 0$$

Def. siano $v, w \in \mathbb{R}^n$, allora v e w si dicono ortogonali se $v \cdot w = 0$

Def. sia B una base di $\mathbb{R}^n$; B si dice ortogonale se gli elementi di B sono a due a due ortogonali tra di loro.

Esempio: la base standard E è ortogonale;

$$\text{la base } B = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è ortogonale.

Def. sia B una base di $\mathbb{R}^n$; B si dice ortonormale se

- i. B è ortogonale
- ii. $\forall b \in B$ vale che $\|b\| = 1$

(i vettori di norma 1 si dicono versori)

Esempio: la base standard E di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

Teorema: (teorema spettrale per matrici simmetriche)

sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e sappiamo che A sia simmetrica,

ovvero ${}^tA = A$; allora esiste una base ortonormale

di autovettori per

$$L_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v \longmapsto A \cdot v$$

(in altre parole l'applicazione lineare L_A si può

diagonalizzare con una base B di $\mathbb{R}^n$ di autovettori

di norma 1 e ortogonali tra loro; dunque se

$$P := M_B^{-1} (id_{\mathbb{R}^n})$$

allora $P^{-1} \cdot A \cdot P$ è diagonale)

Esercizio: sia B una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ e sia

$$P := M_B^{-1} (id_{\mathbb{R}^n})$$

calcolare ${}^tP \cdot P$

Def. sia $W \in \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale; definiamo l'ortogonale

di W come

$$W^\perp := \{ v \in \mathbb{R}^n : v \cdot w = 0 \quad \forall w \in W \}$$

Esercizio: dimostrare che $W^\perp$ è un sottospazio vettoriale

(cio segue dalle proprietà di bilinearità del prodotto scalare)