Teor (Confronto asintotico)

Siano $f, g \in L_{loc}([a,b))$ $\quad f(x) \geq 0, \; g(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b)$

Supponiamo esista $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in [0, +\infty]$

Allora vale quanto segue

1) Se $0 < L < +\infty$ allora

$$f \in L[a,b) \iff g \in L[a,b).$$

2) Se $L = 0$

$$g \in L[a,b) \implies f \in L[a,b)$$

$$\big(f \notin L[a,b) \implies g \notin L[a,b) \big)$$

3) Se $L = +\infty$

$$f \in [a,b) \implies g \in L[a,b).$$

$$\big(g \notin L[a,b) \implies f \in L[a,b) \big)$$

Esempi È il seguente integrale

$$\int_1^{+\infty} \lg\left(1+\frac{1}{x^p}\right) dx$$

convergente, o meglio, per quali $p>0$ è convergente.

Dal limite notevole $\lim_{y\to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1$

segue $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg\left(1+\frac{1}{x^p}\right)}{\frac{1}{x^p}} = 1$

Rapporto

$$\lg\left(1+\frac{1}{x^p}\right) \in L[1,+\infty) \iff \frac{1}{x^p} \in L[1,+\infty)$$

$$\iff p>1.$$

Esempio. È $\frac{1}{x^3-3x^2+2x} \in L[3,+\infty)$?

$$\frac{1}{x^3-3x^2+2x} = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} \in C^0([3,+\infty)) \subseteq L_{loc}[3,+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^3-3x^2+2x}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = 1 \neq 0$$

$$\frac{1}{x^3-3x^2+2x} \in L[3,+\infty) \iff \frac{1}{x^3} \in L[3,+\infty)$$

Quest'ultimo fatto è vero perché $\frac{1}{x^p} \in L[3,+\infty)$ per ogni $p>1$

Verifichiamo che $\frac{1}{[x]^p} \in L[1,+\infty)$

$\iff p > 1$.

Risulta $\frac{1}{[x]^p} \overset{?}{\in} L_{loc}[1,+\infty)$

$$\int_1^{7/4} \frac{1}{[x]^3}\,dx \qquad \frac{7}{4} = \frac{4+3}{4} = 1+\frac{3}{4}$$

$$\int_1^{7/2} \frac{1}{[x]^3}\,dx$$

$x \in [1,+\infty) \longrightarrow [x]^p$ crescente

$\Rightarrow x \in [1,+\infty) \longrightarrow \frac{1}{[x]^p}$ decrescente.

$\Rightarrow$ è localmente integrabile in $[1,+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{[x]^p}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{[x]}\right)^p =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x-(x-[x])}\right)^p$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1-\frac{x-[x]}{x}\right)}\right)^p = 1$$

$\downarrow 0$

$$0 \le \frac{x-[x]}{x} \le \frac{1}{x}$$

$\to 0 \qquad \to 0$

$\frac{1}{[x]^p} \in L[1,+\infty) \iff \frac{1}{x^p} \in L[1,+\infty)$

$\iff p > 1$

$$\int_1^{\frac{7}{4}} \frac{1}{[x]^3}\,dx$$

$$\int_1^{\frac{7}{2}} \frac{1}{[x]^3}\,dx$$

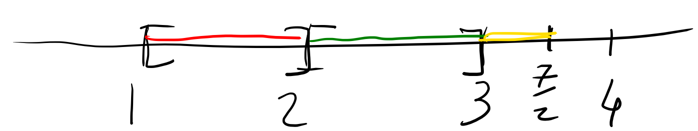
$$1 < \frac{7}{4} < 2$$

In $\left[1, \frac{7}{4}\right]$ $\quad [x] = 1$

$$\frac{[x]^{-3+1}}{-3+1}$$

$$\int_1^{\frac{7}{4}} \frac{1}{[x]^3}\,dx = \int_1^{\frac{7}{4}} 1\,dx = \left(\frac{7}{4} - 1\right) = \frac{3}{4}$$

$$\int_1^{\frac{7}{2}} [x]^{-3}\,dx =$$



$$= \int_1^2 [x]^{-3}\,dx + \int_2^3 [x]^{-3}\,dx + \int_3^{\frac{7}{2}} [x]^{-3}\,dx$$

$$= \int_1^2 dx + \int_2^3 2^{-3}\,dx + \int_3^{\frac{7}{2}} 3^{-3}\,dx$$

Def Sia $f \in L_{loc}[a,b)$ t.c.

$|f| \in L[a,b)$. Allora diciamo che

f è ASS integrabile in $[a,b)$

Teor Se f è ASS integrabile in $[a,b)$ $\Longrightarrow$

f è integrabile in $[a,b)$.

Osservazione

Ricordare che la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

non è integrabile in alcun $[a,b]$ nonostante che $|f| \equiv 1$.

Esempio $\quad \dfrac{\sin x}{x^2} \in L[1,+\infty)$

Infatti $\quad \dfrac{\sin x}{x^2} \in C^0[1,+\infty) \Rightarrow \dfrac{\sin x}{x^2} \in L_{loc}[1,+\infty)$

Inoltre

$$0 \leq \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \in L[1,+\infty)$$

$\frac{1}{x^2} \in$

$$\frac{\sin x}{x^2} \in L_{loc}[1,+\infty) \Rightarrow \frac{|\sin x|}{x^2} \in L_{loc}([1,+\infty)$$

Risulta $\quad \dfrac{|\sin x|}{x^2} \in L[1,+\infty)$ per il teor del confronto

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x^2} \in L[1,+\infty)$$

Equazioni differenziali.

$$y'' = f(x, y, y')$$

x la variabile dipendente,
y è una funzione incognita, y' la sua derivata prima, y'' la derivata seconda

Equazioni scalari lineari del 1° ordine

$$y' = e^x$$

$$y = e^x + c$$

$$y' = f(x)$$

$$y = \int f(x)\, dx$$

$$y' + p(x)\, y = f(x)$$

$$L[y] = y' + p(x)$$

$$L[\lambda y_1 + \mu y_2] = \lambda L[y_1] + \mu L[y_2]$$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall y_1, y_2$ funzioni derivabili

Equazione lineare 1° ordine non omogenea se $f \neq 0$

$$y' + p(x) y = 0$$ è omogenea.

$$y' + 3y = f(x)$$ è a coefficienti costanti.

$$y' + p(x)\, y = f(x)$$

Metodo dell' integrating factor. $\mu(x) \neq 0 \quad \forall x$

$$\mu(x)\, y' + p(x)\, \mu(x)\, y = \mu(x) f(x)$$

Cerco ora una funzione $\mu(x)$ t.c.

$$\mu y' + p \mu y = (\mu y)' = \mu y' + \mu' y$$

$$\cancel{\mu y'} + p \mu y = \cancel{\mu y'} + \mu' y$$

Impongo $\mu' = p\mu$

$$\boxed{\mu = e^{\int p(x)\, dx}}$$

$$\mu' = \underbrace{e^{\int p(x)\, dx}}_{\mu} \left(\int p(x)\, dx \right)'$$

$$\mu' = \mu\, p$$

$$(\mu y)' = \mu f$$

$$\mu y = \int \mu f \, dx$$

$$y = \frac{1}{\mu} \int \mu f \, dx$$

$$y' + x y = x \qquad \mu = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int x\,dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\left(e^{\frac{x^2}{2}} y\right)' = x\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} y = \int x\, e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \int x\, e^{\frac{x^2}{2}}\,dx \qquad \left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{x^2}{2}\right)' = e^{\frac{x^2}{2}} x$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{\frac{x^2}{2}} + C\right)$$

$$\boxed{y = 1 + C e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

è la soluzione generale dell'equazione

$$y' + x y = x \qquad \mu = e^{\frac{x^2}{2} + 3}$$

$$\left(e^{\frac{x^2}{2}+3} y\right)' = e^{\frac{x^2}{2}+3} x$$

$$e^{\frac{x^2}{2}+3} y = \int e^{\frac{x^2}{2}+3} x\,dx = e^3 \int e^{\frac{x^2}{2}} x\,dx$$

$$= e^3\left(e^{\frac{x^2}{2}} + c\right)$$

$$y = 1 + c\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\underbrace{y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y}_{L[y]} = f(x)$$

$$\underbrace{y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y}_{L[y]} = 0$$

omogenea lineare 2° ordine.

<u>Teorema</u> L'insieme delle soluzioni di $L[y] = 0$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2.

$$L[y] = y'' + b y' + c y = 0$$

$b, c \in \mathbb{R}$. Cerco soluzioni della forma $y = e^{rx}$.

$$L[e^{rx}] = (e^{rx})'' + b(e^{rx})' + c e^{rx} =$$

$$= \underbrace{(r^2 + b r + c)}_{} e^{rx} = 0$$

$p(r)$ è il polinomio caratteristico associato all'equazione

$$y'' + b y' + c y = 0 \;\not\Longrightarrow\; r^2 + b r + c = 0$$

$$L[e^{rx}] = p(r)\, e^{rx} = 0 \iff p(r) = 0$$

$$r_\pm = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} \qquad r_+ \neq r_-$$

$e^{r_+ x}$ $\quad$ $e^{r_- x}$