QUADRATIC CASIMIR OPERATOR

Definiamo la UNIVERSAL ENVELOPING ALGEBRA, come l'insieme dei polinomi formali negli elementi dell'alg. di Lie $\mathcal{G}$.

Cioè aggiungiamo elementi del tipo $a^2, a^3+b^2, cb+a^2, \dots \; a,b,c \in \mathcal{G}$

Inoltre, estendiamo il prodotto di Lie su gli elementi usando le stesse regole del commutatore, per es $[ab,c] = a[b,c] + [a,c]b$.

In qto modo, in una rep. R $\rho_R(ab) = \rho_R(a)\rho_R(b) \leftarrow$ già ben def. usando prodotto di matrici

Gli OPERATORI DI CASIMIR sono elementi della universal enveloping algebra che commutano con tutti gli elem. di $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{O} \text{ t.c. } [\mathcal{O}, a] = 0 \quad \forall a \in \mathcal{G}$$

$\Longrightarrow$ (lemma di Schur) In una IRREP, $\mathcal{O}$ è rappresentato da una matrice proporzionale alla matrice id. $\mathbb{1}_R$.

$$\rho_R(\mathcal{O}) = c_{\mathcal{O}}(R)\,\mathbb{1}_R$$

$\rightarrow$ la cost. $c_{\mathcal{O}}(R)$ permette di classificare le irrep.

Quadratic Casimir operator

Consid. l'elem:

$$Q = \sum_{a,b} k_{ab} T^a T^b \qquad k^{ab} = k(T^a, T^b)$$

$\hookrightarrow c_2(R)\, \mathbb{1}_R$ se R è irrep

$$[Q, T^c] = \sum_{a,b} k_{ab} [T^a T^b, T^c] =$$

$$= \sum_{a,b} k_{ab} \left(T^a [T^b, T^c] + [T^a, T^c] T^b \right)$$

$$= \sum_{a,b} k_{ab} \left(T^a T^d f^{bc}{}_d + f^{ac}{}_d T^d T^b \right) =$$

$f^{abc} = f^{ab}{}_d k^{dc}$

$\downarrow$

$f^{bc}{}_d = f^{bc}{}_m k^{ml} k_{ld}$

$= f^{bcl} k_{ld}$

$$= \sum_{a,b} k_{ab}\, 2\, f^{bc}{}_d \left(T^a T^d + T^d T^a \right)$$

$$= \sum_{a,b,d,l} 2\, k_{ab} k_{ld}\, f^{bcl} \left(T^a T^d + T^d T^a \right)$$

$$= \sum_{b,l} 2\, f^{bcl} \left(\sum_a k_{ba} T^a \sum_d k_{ld} T^d + \sum_d k_{l\cancel{d}_a} T^{\cancel{d}^a} \sum_a k_{b\cancel{a}_d} T^{\cancel{a}^d} \right) =$$

$$= \sum_{b,l} 2\, \underbrace{f^{bcl}}_{\substack{\text{antisim.} \\ \text{in } b \leftrightarrow l}} \underbrace{\sum_{a,d} \left(k_{ba} k_{ld} + k_{la} k_{bd} \right)}_{\text{simm. in } b \leftrightarrow l} T^a T^d$$

$$= 0 \quad //$$

Nella base di Cartan–Weyl $\left(k(H^i, H^j) = \delta^{ij} \right)$

$$Q = \sum_{i=1}^{r} H^i H^i + \sum_{\alpha > 0} \frac{|\alpha|^2}{2} \left(E^\alpha E^{-\alpha} + E^{-\alpha} E^\alpha \right)$$

ES. Verificare.

Per conoscere Q in irrep. R, basta che valuti Q su highest weight state $|\Lambda\rangle$, poiché $Q = \gamma_R \mathbb{1}_R$.

$$Q|\Lambda\rangle = \sum_{i=1}^{r} \Lambda^i \Lambda^i |\Lambda\rangle + \sum_{\alpha\in\Delta_+} \frac{|\alpha|^2}{2} [e_\alpha^{R_\Lambda}, e_{-\alpha}^{R_\Lambda}] |\Lambda\rangle =$$

$$= (\Lambda,\Lambda)|\Lambda\rangle + \sum_{\alpha\in\Delta_+} \frac{\cancel{|\alpha|^2}}{\cancel{2}} \cancel{2} \frac{\overset{h_\alpha}{\widetilde{\alpha\cdot H}}}{\cancel{|\alpha|^2}} |\Lambda\rangle =$$

$$= (\Lambda,\Lambda)|\Lambda\rangle + \sum_{\alpha\in\Delta_+} (\alpha,\Lambda)|\Lambda\rangle =$$

$$= (\Lambda + 2\rho, \Lambda)|\Lambda\rangle = \qquad \rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+} \alpha \quad \text{Weyl vector}$$

$$= (|\Lambda+\rho|^2 - |\rho|^2)|\Lambda\rangle$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{Q|_{R_\Lambda} = (\Lambda+2\rho,\Lambda)\mathbb{1}_{V_\Lambda} \equiv C_2(R_\Lambda)\mathbb{1}_{V_\Lambda}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tr}_{R_\Lambda} Q = (\Lambda+2\rho, \Lambda) \dim V_\Lambda$$

A volte ci si riferisce a $C_2(R)$ anch'esso come quadratic Casimir.

(In generale ci sono r Casimir operators indipendenti.)

Es. $sl(2,\mathbb{C})$ o algebra momenti angolari. $Q = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \quad = \vec{J}^2$

$\vec{J}^2$ commuta con tutte J_i e assume un valore fissato in una irrep. Tale valore è $j(j+1) = \frac{1}{4}(\Lambda, \Lambda+2\rho)_{\Lambda=2j,\ \rho=1}$ $_{\text{SPIN}}$ ($\frac{1}{4}$ dovuto a normalizz.)

CASIMIR QUADRATIC OPERATOR

e normalizzaz. γ della Killing form

- Consideriamo la base $\{H^i\}$ di $\mathcal{H}$ t.c. $K(H^i,H^j)=\delta^{ij}$
- Q.to fisso $\gamma = \frac{1}{2r}\sum_{\alpha\in\Delta}|\alpha|^2$.
- Notiamo che $\dim G = K_{ab}K^{ab} = \frac{1}{2\gamma}K_{ab}\,\mathrm{Tr}\left(ad(T^a)\,ad(T^b)\right) =$ $\quad \rho_{Ad}(T^a) \Rightarrow \Lambda=\theta$ highest root

$$= \frac{1}{2\gamma}\mathrm{Tr}_{Adj}\,Q = \frac{1}{2\gamma}\dim G\,(\theta,\theta+2\rho)$$

$$\Rightarrow 2\gamma = (\theta,\theta+2\rho) \overset{(*)}{=} |\theta|^2 g^\vee \quad (\circ)$$

$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha = \sum_i \omega_i$

$g^\vee$: dual Coxeter number

- θ è una long root. $\quad \theta = \frac{|\theta|^2}{2}\sum_{i=1}^r a_i^\vee \alpha_i^\vee$

- Scegliamo la normalizzaz. delle roots fissando $\underline{|\theta|^2=2}$.

$\rightsquigarrow$ da $(\circ)$ vediamo che abbiamo ottenuto la normalizzaz. di K:

$$\longrightarrow \boxed{\gamma = g^\vee \quad \text{se } |\theta|^2=2.}$$

$(*)$ $(\theta,\theta+2\rho) = |\theta|^2 + 2(\theta,\rho) = |\theta|^2\left(1+\sum_{i=1}^r a_i^\vee\left(\alpha_i^\vee,\sum_{j=1}^r\omega_j\right)\right) = |\theta|^2 g^\vee$

Es. A_{N-1} $\qquad Q_{Ad} = c_2(Ad)\,\mathbb{1}_{\dim G_{A_{N-1}}}$

$$c_2(Adj) = (\theta,\theta+2\rho) = |\theta|^2 g^\vee = 2g^\vee = 2N \quad \leftarrow \quad = c(Ad)$$

(Nei testi di QFT, si sceglie normalizzazione $|\alpha|^2=1$ per α long root.
$\rightarrow c(Ad)=N$ per $SU(N)$.)

DYNKIN INDEX

Consideriamo la Killing form

$$K : \mathcal{g} \times \mathcal{g} \to \mathbb{C}$$
$$(a,b) \mapsto K(a,b) \equiv \frac{1}{2\gamma} \mathrm{tr}_{\mathcal{g}}(\mathrm{ad}(a)\,\mathrm{ad}(b))$$

- Per un'alg. di Lie $\mathcal{G}$ semplice, la Killing form è non-degenere

$\Longrightarrow$ possiamo definire un' ISOMORFISMO tra $\mathcal{G}$ e suo sp. duale $\mathcal{G}^*$.

$$\varphi_K : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$$
$$a \mapsto K(a, \cdot)$$

- Mettiamoci in rep. R con $\rho_R : \mathcal{G} \to \mathrm{End}(V_R)$

e definiamo la forma bilineare (non-degenere)

$$\eta_R : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathbb{C}$$
$$(a,b) \mapsto \eta_R(a,b) \equiv \mathrm{tr}_R(\rho_R(a)\,\rho_R(b))$$

$\Longrightarrow$ definiamo l' isomorfismo

$$\varphi_R : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$$
$$a \mapsto \eta_R(a, \cdot)$$

- Possiamo def. un automorfismo su $\mathcal{G}$ usando φ_K e φ_R:

$$\varphi_K^{-1} \circ \varphi_R : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

- Siccome φ_R e φ_R sono G-invarianti$^{(*)}$ ($\mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}} G$), anche l'automorfismo $\varphi_K^{-1} \circ \varphi_R$ è G-invariante e quindi COMMUTA con $ad(x)$ $\forall x \in \mathfrak{g}$ $\xRightarrow{\text{Schur}}$ $\varphi_K^{-1} \circ \varphi_R = c(R)\, \mathbb{1}_{Adj}$

(*) L'azione di G è t.c. $a \mapsto g^{-1} a g$ (ben def. in qui rep.)

$$\eta_R(g \cdot a, g \cdot b) = tr_R(\rho_R(g)\rho_R(a)\rho_R(g^{-1}) \cdot \rho_R(g)\rho_R(b)\rho_R(g^{-1})) =$$

$$= tr_R(\rho_R(a)\rho_R(b)) = \eta_R(a,b) \qquad K = \frac{1}{2\gamma}\eta_{Ad}.$$

- Componendo qta relazione con φ_K otteniamo

$$\varphi_R = c(R)\, \varphi_K$$

che implica

$$\boxed{\eta_R = c(R)\, K} \quad (*)$$

$\leftarrow$ Tutte le forme bilineari η_R sono prop. alla Killing form

- $tr_R(t_R^a t_R^b) = \eta_R(T^a, T^b) = c(R)\, K(T^a, T^b) = c(R)\, K^{ab} = c(R)\,\delta^{ab}$

$\rightarrow tr_R(t_R^a t_R^b) = c(R)\,\delta^{ab}$ (spesso trovata in letteratura fisica)

per un alg. compatta posso diagonalizzare

- $\eta_{Adj} = 2\gamma\, K = 2 g^\vee K \quad \Rightarrow \quad c(Adj) = 2 g^\vee$

Fattore 2 dovuto alla normalizzazione "matematica" $|\theta|^2 = 2$.
Con normalizzaz. "fisica", cioè $|\theta|^2 = 1$, il 2 sparisce.

Es. A_{N-1}

Highest root $\theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{N-1} = \alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee + \ldots + \alpha_{N-1}^\vee$ con norm. $|\alpha_i|^2 = |\theta|^2 = 2$.

$$\Rightarrow a_i^\vee = 1 \Rightarrow g^\vee = 1 + \sum_{i=1}^{r} 1 = N \Rightarrow c(Adj) = 2N$$

• La relazione $(\star)$ ci dice che

$$\mathrm{tr}_R(t^a_R\, t^b_R) = \eta_R(T^a, T^b) = c(R)\, k^{ab}$$

Contraiamo entrambi i membri con k_{ab} :

$$\mathrm{tr}_R Q = \mathrm{tr}_R\left(k_{ab}\, t^a_R t^b_R\right) = k_{ab}\, \eta_R(T^a, T^b) = c(R)\, k_{ab} k^{ab} = c(R)\, \dim \mathfrak{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{c(R_\Lambda) = \frac{(\Lambda, \Lambda + 2\rho)\, \dim V_{R_\Lambda}}{\dim \mathfrak{g}} = C_2(R_\Lambda)\ \frac{d_R}{d}}$$

Es. Rep. fondam. $\underline{N}$ di $sl(N, \mathbb{C}) = A_{N-1}$. $\Lambda = (1, 0, \dots, 0)$

$$c(\underline{N}) = \underbrace{(\Lambda, \Lambda + 2\rho)}_{C_2(N)}\ \frac{\dim V_{\underline{N}}}{\dim A_{N-1}} =$$

$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha = (1, 1, 1, \dots, 1)$

$$= \left((\Lambda, \Lambda) + (\Lambda, \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha) \right) \frac{N}{N^2 - 1}$$

• $(\Lambda, \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha) = (\omega_1, \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha) = (\omega_1, \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) + \dots + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{N-1}))$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} 1 = N - 1$$

• $(\Lambda, \Lambda) = \sum_{i,j} \Lambda_i (A^{-1})_{ij} \Lambda_j = (A^{-1})_{11} = \frac{N-1}{N}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

$(A^{-1})_{11} = \frac{1}{\det A} \det(\mathrm{Minor}_{11})$

↑ matrice di Cartan di A_{N-2}

$\det A_{A_1} = 2 \qquad \det A_{A_2} = 3$

$$\det A_k = 2 \det A_{k-1} - \det A_{k-2} = 2(2\det A_{k-2} - \det A_{k-3}) - \det A_{k-2} =$$

$$= 3 \det A_{k-2} - 2 \det A_{k-3} = 4 \det A_{k-3} - 3 \det A_{k-4} = \dots$$

$$= p \det A_{k-p+1} - (p-1) \det A_{k-p} \underset{p = k-1}{=} (k-1) \det A_2 - (k-2) \det A_1$$

$$= 3k - 3 - 2k + 4 = k + 1$$

$$\Rightarrow \quad c(\underline{N}) = \left(\frac{N-1}{N} + N-1 \right) \frac{N}{N^2-1}$$

$$= \frac{(\cancel{N-1})}{\cancel{N}} (\cancel{N+1}) \frac{\cancel{N}}{(\cancel{N-1})(\cancel{N+1})} = 1$$

(Questa non è la normalizzazione standard usata in letteratura fisica, che invece è t.c. $c(\underline{N}) = 1/2$.)

Ricordiamo:

Nella normalizzazione che usiamo qui, $c_2(R)$ e $c(R)$ sono il doppio rispetto alla normalizzazione tipica usata dai fisici.