ANOMALIA in $d=2$

Consideriamo $\mathcal{L} = i\bar\Psi \not\partial \psi - m\bar\Psi\psi$, ma in $d=2$.

In $d=2$ $\quad \gamma^0 = \sigma^2 \quad \gamma^1 = -i\sigma^1 \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$

$\gamma_5 = -\gamma^0\gamma^1 = \sigma^3 \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1} \quad \gamma_5^+ = \gamma_5 \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$

C'è una simmetria $U(1)_V \times U(1)_A$

$\uparrow$ simm. solo se $m=0$

↳ (quando $m=0$) abbiamo le seguenti identità di Ward

$$\partial_\mu^x \langle j^\mu(x) j^\nu(0) \rangle = 0$$
$$\partial_\mu^x \langle j_A^\mu(x) j^\nu(0) \rangle = \partial_\mu^x \langle j^\mu(x) j_A^\nu(0) \rangle = 0 \qquad (\ast)$$
$$\partial_\mu^x \langle j_A^\mu(x) j_A^\nu(0) \rangle = 0$$

↳ verificheremo queste relazioni calcolando esplicitam. i correlator.
(le id. di Ward per tutti gli altri correlatori sono soddisfatte)

In $d=2$ i tre tipi di correlatori in $(\ast)$ sono legati da una semplice relazione:

$$\gamma_5 \gamma^\mu = \begin{cases} \gamma^1 & \mu=0 \\ \gamma^0 & \mu=1 \end{cases} = -\epsilon^{\mu\nu}\gamma_\nu$$

$-\epsilon_{01} = 1 = +\epsilon^{01}$

$-\epsilon_{10} = -1 = +\epsilon^{10}$

$\gamma^0 = \sigma^2 \quad \gamma^1 = -i\sigma^1$

$\gamma_5 = -\gamma^0\gamma^1 = \sigma^3$

$\epsilon^{\mu\nu}\epsilon_{\nu\varsigma} = \delta^\mu_\varsigma$

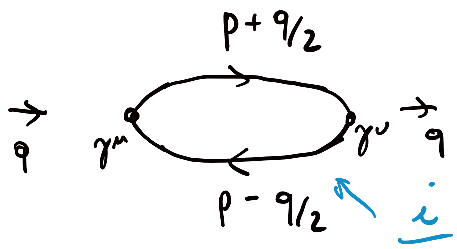
$$\Rightarrow \quad j_A^\mu = \bar\Psi \gamma^\mu \gamma_5 \psi = \epsilon^{\mu\nu} \bar\Psi \gamma_\nu \psi = \epsilon^{\mu\nu} j_\nu$$

$$\Rightarrow \quad \langle j_A^\mu j^\nu \rangle = \epsilon^{\mu\varsigma} \langle j_\varsigma j^\nu \rangle$$
$$\langle j_A^\mu j_A^\nu \rangle = \epsilon^{\mu\varsigma}\epsilon^{\nu\sigma} \langle j_\varsigma j_\sigma \rangle$$

→ ci basta calcolare il correl. tra due correnti vettoriali.

$T^{\mu\nu} \equiv$ Trasf. di Fourier di $\langle j^\mu(x)\, j^\nu(0) \rangle$:

(Reintroduciamo $m \neq 0$ per il momento, poi prenderemo $\lim m \to 0$)



$$\rightsquigarrow \; T^{\mu\nu} = (-)\, i^2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu(\not p + \frac{\not q}{2} + m)\,\gamma^\nu(\not p - \frac{\not q}{2} + m)\right)}{\left((p+\frac{q}{2})^2 - m^2 + i\epsilon\right)\left((p-\frac{q}{2})^2 - m^2 + i\epsilon\right)}$$

$$\frac{i}{\not p - \frac{\not q}{2} - m} = i\, \frac{\not p - \frac{\not q}{2} + m}{(p - \frac{q}{2})^2 - m^2}$$

- c'è una divergenza logaritmica per $p \to \infty$
  $\to$ c'è necessità di REGOLARIZZAZIONE

Si vede anche che se aggiungo un'altra inserzione di corrente, integrale converge $\Rightarrow$ WI soddisfatta

- $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_2) = 2\eta^{\mu\nu}$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu) = \mathrm{Tr}(\gamma_5^2\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu) = -\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma_5) =$$
$$\underset{\text{cic. traccia}}{=} -\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu) \Rightarrow = 0$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma) = -\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu + 2\eta^{\nu\sigma}\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\rho) =$$
$$= \mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu - 2\eta^{\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\gamma^\nu + 2\eta^{\nu\sigma}\, 2\eta^{\mu\rho} =$$
$$= -\mathrm{Tr}\,\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu + 4\eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\nu} - 4\eta^{\rho\sigma}\eta^{\mu\nu} + 4\eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma) = 2\eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\nu} - 2\eta^{\rho\sigma}\eta^{\mu\nu} + 2\eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}$$

$$\to \mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu(\not p + \frac{\not q}{2} + m)\,\gamma^\nu(\not p - \frac{\not q}{2} + m)\right) = (p^\rho + \frac{q^\rho}{2})(p^\sigma - \frac{q^\sigma}{2})\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma) + m^2\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)$$

$$= \frac{1}{2}(2p^\rho + q^\rho)(2p^\sigma - q^\sigma)(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\nu} - \eta^{\rho\sigma}\eta^{\mu\nu} + \eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}) + 2m^2\eta^{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(2p^\nu + q^\nu)(2p^\mu - q^\mu) - \underbrace{(2p+q)\cdot(2p-q)}_{4p^2 - q^2} + (2p^\mu + q^\mu)(2p^\nu - q^\nu)\right\} + 2m^2\eta^{\mu\nu}$$

$$= 4p^\mu p^\nu - q^\mu q^\nu + \eta^{\mu\nu}\left(-2p^2 + \frac{q^2}{2} + 2m^2\right)$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2}\int d^2p \, \frac{2\left(2p^\mu p^\nu - \frac{q^\mu q^\nu}{2} + \eta^{\mu\nu}\left(-p^2 + \frac{q^2}{4} + m^2\right)\right)}{\left(\left(p+\frac{q}{2}\right)^2 - m^2 + i\epsilon\right)\left(\left(p-\frac{q}{2}\right)^2 - m^2 + i\epsilon\right)}$$

•) Uno potrebbe provare a moltiplicare per q_μ, portandolo dentro l'integrale. Con varie manipolazioni, incluso lo shift della variabile di integrazione, si può portare l'integrale nella forma $\int d^2p \, f(p)$, con $f(-p) = -f(p)$. Qto porterebbe a concludere che $q_\mu T^{\mu\nu} = 0$.
Tuttavia qte operazioni non sono lecite con un integrale divergente (sarebbe come dire $\infty - \infty = 0$).

Qte manipolazioni sono lecite se l'integrale è convergente; qto accade per $\underbrace{\langle j^1 \dots j^N \rangle}_{N>2}$, il che permette di dimostrare che le WI sono soddisfatte per tali correlatori.

•) $T^{\mu\nu}$ è simmetrico in $\mu \leftrightarrow \nu$ e dip. da $\eta^{\mu\nu}$ e q^μ:

$$\rightarrow \quad T^{\mu\nu} = q^\mu q^\nu T_1(q^2) + \eta^{\mu\nu} T_2(q^2)$$

def. $\tilde{q}^\mu \equiv \epsilon^{\mu s} q_s \quad \longleftrightarrow \quad q_\rho \propto \epsilon_{\rho\sigma} \tilde{q}^\sigma$

$$\epsilon_{\rho\sigma}\tilde{q}^\sigma = \underbrace{\epsilon_{\rho\sigma}\epsilon^{\sigma\alpha}}_{\delta_\rho^\alpha} q_\alpha$$

$$\rightarrow \quad T^{\mu\nu} = \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1(q^2) + \eta^{\mu\nu} \tilde{T}_2(q^2)$$

•) Mass-dim. $\quad \underset{\uparrow \text{da def-}T^{\mu\nu}}{[T^{\mu\nu}] = 0} \quad \rightarrow \quad [\tilde{T}_1] = -2 \qquad [\tilde{T}_2] = 0$

Definiamo $T^{\mu\nu}$ usando le DISPERSION RELATIONS

$\epsilon^{01} = 1$

$$\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1 = \epsilon^{\mu\rho} q_\rho \, \epsilon^{\nu\sigma} q_\sigma \, \tilde{T}_1$$

$$\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu = \begin{pmatrix} q_1 q_1 & -q_1 q_0 \\ -q_0 q_1 & q_0 q_0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}^2 = \epsilon^{\mu\rho} q_\rho \, \epsilon^{\nu\sigma} q_\sigma \, \eta_{\mu\nu} =$$
$$= \epsilon^{\mu\rho} q_\rho \, \epsilon_{\mu\sigma} q^\sigma = -q^2$$

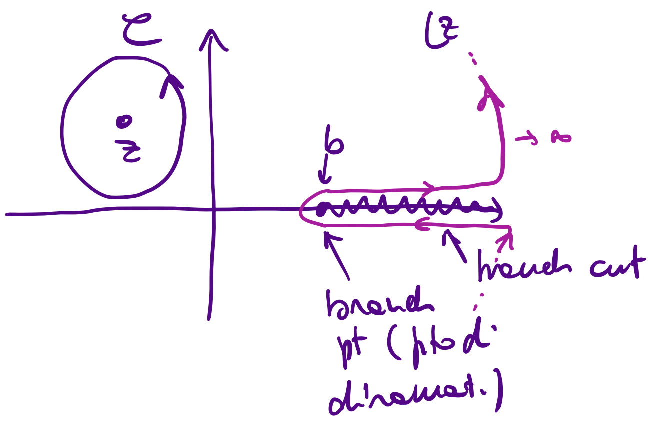
$$\eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = q^2 T_1 + 2 T_2$$
$$= \tilde{q}^2 \tilde{T}_1 + 2 \tilde{T}_2$$
$$= -q^2 \tilde{T}_1 + 2 \tilde{T}_2$$
$$= -q^2 \tilde{T}_1 + 2 q^2 T_1 + 2 T_2$$
$$\Rightarrow \tilde{T}_1 = T_1$$

$$q_\mu q_\nu T^{\mu\nu} = (q^2)^2 T_1 + q^2 T_2$$
$$= q^2 \tilde{T}_2$$
$$\rightarrow \tilde{T}_2 = q^2 T_1 + T_2 .$$

RELAZIONI DI DISPERSIONE

Prendiamo un'ampiezza T che sia analitica nella sua variab.
ma con delle singolarità (poli, branch pt, ...)

$$T(q^2) \longrightarrow T(z) \qquad q^2 \leftrightarrow z \in \mathbb{C}$$



Consideriamo una funz. $T(z)$ con un branch cut

Se uno vuole conoscere il valore di T in z, può usare Cauchy:

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{T(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Deformiamo in maniera continua il contorno $\mathcal{C}$ $\to$ l'integrale non cambia

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_b^\infty \frac{T(\zeta + i\epsilon) - T(\zeta - i\epsilon)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_\infty} \frac{T(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$\| \qquad\qquad \zeta = Re^{i\theta} \quad R \to \infty$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_b^\infty \frac{\mathrm{Disc}\, T(\zeta)}{\zeta - z} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{R\, d\theta\ T(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - z}$$

legato a $\mathrm{Im}\, T(z)$

$R \to \infty$

$\Downarrow$

questo integrale $\to 0$ se $T(R) \to 0$ per $R \to \infty$

Se $T(z) \to 0$ per $z \to \infty$, allora $T(z)$ è determinato dalla sua DISCONTINUITÀ (cioè diff. tra $T(z)$ sopra il taglio e $T(z)$ sotto il taglio)

Se invece $T(z) \not\to 0$ per $z \to \infty$, prendiamo la differenza

$$T(z) - T(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_b^{\infty} d\zeta\, \mathrm{Disc}\,T(\zeta)\underbrace{\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right)}_{\frac{\cancel{\zeta} - z_0 - \cancel{\zeta} + z}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\infty} d\zeta\, T(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right)$$

$$T(z) = T(z_0) + \frac{(z - z_0)}{2\pi i}\int \frac{\mathrm{Disc}\,T(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}\, d\zeta + \frac{(z - z_0)}{2\pi i}\oint_{C_\infty} \frac{T(z)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}\, d\zeta$$

ora denominatore va come ζ^2 (invece di ζ)

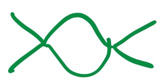
$\to 0$ per $R \to \infty$

se $\frac{T(R)}{R} \to 0$ per $R \to \infty$

Se $\frac{T(R)}{R} \to 0$ per $R \to \infty$

$$T(z) = T(z_0) + \frac{(z - z_0)}{2\pi i}\int \frac{\mathrm{Disc}\,T(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}\, d\zeta$$

$T(z)$ è ancora determinato dalla sua Disc, ma ora a meno di una COST. ARBITRARIA (regolarizzazione)

[ ⇝ calcoliamo Disc ⇝ ampiezza

↑ $T(R) \not\to 0$ $R \to \infty$ ma $\frac{T(R)}{R} \to 0$ $R \to \infty$

⇝ cost. arbitraria ⇝ λ]

⇒ Se abbiamo un metodo per calcolare la disc. dell'ampiezza (senza calcolare prima l'ampiezza), allora siamo in grado di ricostruire l'ampiezza (a meno di cost. di normalizzazione.)

↓

↳ Q.to metodo è dato dalle regole di CUTKOWSKI:

prendere l'espressione dell'ampiezza (dopo aver applicato le regole di Feynman) e sostituire ai propagatori

$$\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon} \longrightarrow -2\pi i\,\delta(p^2-m^2)\,\theta(p^0)$$

("mettere on-shell i propag.")

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2}\int d^2p \;\frac{\overbrace{2\left(2p^\mu p^\nu - \frac{q^\mu q^\nu}{2} + \eta^{\mu\nu}\left(-p^2+\frac{q^2}{4}+m^2\right)\right)}^{\equiv(\mathrm{NUM})}}{\left(\left(p+\frac{q}{2}\right)^2-m^2+i\epsilon\right)\left(\left(p-\frac{q}{2}\right)^2-m^2+i\epsilon\right)}$$

$$\mathrm{Disc}\,T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2}\int d^2p\;(\mathrm{NUM})\,(-2\pi i)^2\,\delta\left(\left(p+\frac{q}{2}\right)^2-m^2\right)\delta\left(\left(p-\frac{q}{2}\right)^2-m^2\right)\cdot$$

$$\cdot\,\theta\left(p^0+\frac{q^0}{2}\right)\theta\left(p^0-\frac{q^0}{2}\right)$$

Vediamo che condizioni impongono le δ-funct. su p^0 e p^1.

→ Mettiamoci per comodità nel frame $q^\mu \doteq (q,0)$ ← $q \neq 0$

$$\begin{cases} \left(p^0+\frac{q}{2}\right)^2-(p^1)^2-m^2=0 \\ \left(p^0-\frac{q}{2}\right)^2-(p^1)^2-m^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(p^0+\frac{q}{2}\right)^2-\left(p^0-\frac{q}{2}\right)^2=0 \\ (p^1)^2=(p^0)^2+\frac{q^2}{4}-m^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} p^0 q = 0 \\ p^1 = \pm\sqrt{\frac{q^2-4m^2}{4}} \end{cases} \leftarrow \underline{\text{due}} \text{ soluzioni}$$

in forma cov. ⟿

$$p^\mu = \pm\,\epsilon^{\mu\nu}q_\nu\sqrt{\frac{q^2-4m^2}{4}} = \pm\,\tilde{q}^\mu\sqrt{\frac{q^2-4m^2}{4}}$$

$$\int dp^0 dp^1 \, \delta(\overset{\ell_1}{f_1(p)})\, \delta(\overset{\ell_2}{f_2(p)})\, g(p) \neq g(p_i)$$

p_i sono soluz. di $\begin{cases} f_1(p) = 0 \\ f_2(p) = 0 \end{cases}$

$$\downarrow$$

$$\sum_i \frac{1}{\mathrm{Jac}(p_i)} g(p_i)$$

Jacobiano di trasf. di coord da p^0, p^1 a ℓ_1, ℓ_2

Calcoliamo lo Jacobiano

$$\left(p+\frac{q}{2}\right)^2 - m^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2 + p^0 q^0 - p^1 q^1 + \frac{(q^0)^2}{4} - \frac{(q^1)^2}{4} - m^2 \leftarrow \ell_1$$

$$\left(p-\frac{q}{2}\right)^2 - m^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2 - p^0 q^0 + p^1 q^1 + \frac{(q^0)^2}{4} - \frac{(q^1)^2}{4} - m^2 \leftarrow \ell_2$$

$$\mathrm{Jac} = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial \ell_1}{\partial p^0} & \frac{\partial \ell_1}{\partial p^1} \\ \frac{\partial \ell_2}{\partial p^0} & \frac{\partial \ell_2}{\partial p^1} \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 2p^0 + q^0 & -2p^1 - q^1 \\ 2p^0 - q^0 & -2p^1 + q^1 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} 4p^0 & -4p^1 \\ 2p^0 - q^0 & -2p^1 + q^1 \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 4p^0 & -4p^1 \\ -q^0 & q^1 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= 4\,|\underbrace{p^0 q^1 - p^1 q^0}_{p^0 \tilde{q}_0 + p^1 \tilde{q}_1}| = 4\,|p \cdot \tilde{q}| \Longrightarrow \underset{i=1,2}{\mathrm{Jac}(p_i)} = 4\,|\tilde{q} \cdot \tilde{q}| \sqrt{\frac{q^2 - 4m^2}{4q^2}}$$

sostituisco $p^\mu = p_i^\mu = \pm \tilde{q}^\mu \sqrt{\frac{q^2 - 4m^2}{4q^2}}$

$\tilde{q}^2 = -q^2$ (vedi prossima pagina)

$$\mathrm{Jac}(p_i) = 4\,|q^2| \sqrt{\frac{q^2 - 4m^2}{4q^2}} =$$

$$= 2\sqrt{\cancel{4q^2} \cdot q^2 \, \frac{(q^2 - 4m^2)}{\cancel{4q^2}}} = 2\sqrt{q^2(q^2 - 4m^2)}$$

$$\mathrm{NUM}(p_1) = 2\left(2p_1^\mu p_1^\nu - \frac{q^\mu q^\nu}{2} + \eta^{\mu\nu}\left(-p_1^2 + \frac{q^2}{4} + m^2\right)\right) =$$

$$= 4\,\tilde q^\mu \tilde q^\nu \left(\frac{q^2-4m^2}{4q^2}\right) - q^\mu q^\nu + 2\eta^{\mu\nu}\left(-\cancel{\tilde q^2}\left(\frac{q^2-4m^2}{4q^2}\right) + \frac{q^2}{4} + m^2\right)$$

$$\tilde q^2 = \tilde q^\mu \tilde q_\mu = q_\nu \underbrace{\epsilon^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\rho}}_{=-\delta^\nu{}_\rho} q^\rho = -q^2$$

$$= \tilde q^\mu \tilde q^\nu \left(1 - 4\frac{m^2}{q^2}\right) - q^\mu q^\nu + \eta^{\mu\nu}\left(\frac{q^2}{2} - \cancel{2m^2} + \frac{q^2}{2} + \cancel{2m^2}\right)$$

$$= \tilde q^\mu \tilde q^\nu - \frac{4m^2}{q^2}\tilde q^\mu \tilde q^\nu + \underbrace{\eta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu}$$

$$= \begin{pmatrix} q^{0\,2} - q^{1\,2} - q^{0\,2} & -q^0 q^1 \\ -q^0 q^1 & -q^{0\,2} + q^{1\,2} - q^{1\,2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -q^{1\,2} & -q^0 q^1 \\ -q^0 q^1 & -q^{0\,2} \end{pmatrix} = -\tilde q^\mu \tilde q^\nu \qquad \epsilon^{01} = -1$$

$$\tilde q^\mu = \epsilon^{\mu\nu} q_\nu = (+q^1, +q^0)$$

$$(\mathrm{NUM})(p_1) = \cancel{\tilde q^\mu \tilde q^\nu} - \frac{4m^2}{q^2}\tilde q^\mu \tilde q^\nu - \cancel{\tilde q^\mu \tilde q^\nu} = -\frac{4m^2}{q^2}\tilde q^\mu \tilde q^\nu$$

per $q^2 < 4m^2$ non ci sono solut. p_i

$$\mathrm{Disc}\, T^{\mu\nu} = -\left(-\frac{4m^2}{q^2}\tilde q^\mu \tilde q^\nu\right)\frac{1}{2\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}} \cdot 2 \quad \Theta(q^2-4m^2)$$

due solut. p_i

$$\left(\begin{array}{l} \mathrm{NUM}(p_1) = \mathrm{NUM}(p_2) \\ \mathrm{Jac}(p_1) = \mathrm{Jac}(p_2) \end{array}\right)$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{4m^2}{q^2}\frac{1}{\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}\tilde q^\mu \tilde q^\nu\, \Theta(q^2-4m^2)$$