

Variabili Aleatorie e Misurabilità

Variabili Aleatorie

- Idea:

- ▶ per un dato esperimento aleatorio rappresentato da Ω , si possono calcolare diverse quantità, o enti, che dipendono dal risultato dell'esperimento
- ▶ formalmente, si tratta di applicazioni

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

variabile aleatoria

$$\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

vettore di variabili aleatorie

$$X : \Omega \rightarrow E$$

ente aleatorio a valori in E

- ▶ il vero $\omega \in \Omega$ che si realizza non è noto, quindi non è noto $X(\omega)$

Variabili Aleatorie

- Esercizio. Lancio di due dadi, definire le seguenti variabili aleatorie: risultato del primo e del secondo dado; somma, prodotto, massimo, minimo, scarto fra i due dadi
- Esercizio. Infiniti lanci di una moneta, definire le seguenti variabili aleatorie: $X_n = 1$ se esce T al lancio n -esimo, 0 altrimenti; T_n = numero di T nei primi n lanci; D_n = differenza tra il numero di T e C nei primi n lanci; C_n = numero massimo di T consecutive nei primi n lanci

$$\Omega = \{ (i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6 \}$$

$$X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$X_1((i, j)) = i$$

$$X_2((i, j)) = j$$

$$\underline{X}((i, j)) = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$

$$S((i, j)) = i + j = X_1((i, j)) + X_2((i, j))$$

$$\Delta((i, j)) = |i - j|$$

Misurabilità

- Per varie ragioni, solo applicazioni **misurabili** possono essere considerate

▶ $(\Omega, \mathcal{F}), (\Omega', \mathcal{F}')$ due spazi misurabili (INSIEMI + σ -ALGEBRA)

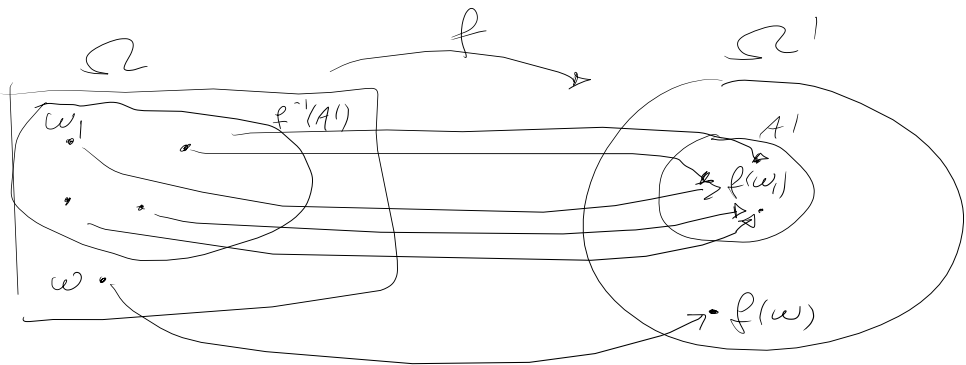
▶ $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ è $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ **misurabile** se

$$\underline{f^{-1}(A') \in \mathcal{F} \text{ per ogni } A' \in \mathcal{F}'}$$

$\rightsquigarrow$ ogni controimmagine di insiemi in $\mathcal{F}'$ è in $\mathcal{F}$

▶ **controimmagine** di A' tramite f :

$$f^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A'\} \subset \Omega$$



$w_1 \in f^{-1}(A') \quad \checkmark$
 $w \notin$

Misurabilità

- [Commutabilità della controimmagine]

$$f : \Omega \rightarrow \Omega', A' \subset \Omega', (A'_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \Omega'$$

- ▶ $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

- ▶ $f^{-1}(\Omega') = \Omega$

- ▶ $f^{-1}(\overline{A'}) = \overline{f^{-1}(A')}$

- ▶ $f^{-1}(\cup_\alpha A'_\alpha) = \cup_\alpha f^{-1}(A'_\alpha)$

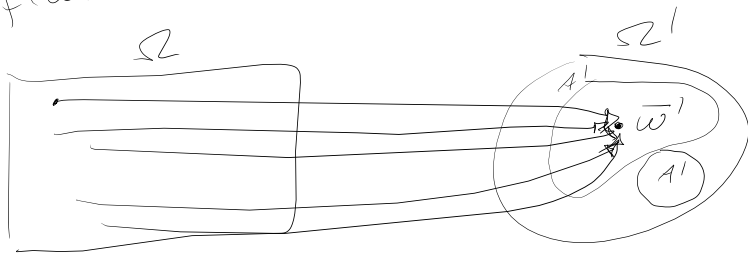
- ▶ $f^{-1}(\cap_\alpha A'_\alpha) = \cap_\alpha f^{-1}(A'_\alpha)$

Misurabilità

- Esercizio. Esempi/osservazioni su applicazioni misurabili
 - ▶ $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ **applicazione costante**: fissato $\bar{\omega}' \in \Omega'$, $f(\omega) = \bar{\omega}'$ per ogni $\omega \in \Omega$; è sempre misurabile
 - ▶ $\Omega = \Omega'$, f **applicazione identica**: $f(\omega) = \omega$; quando è misurabile?
 - ▶ $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ misurabile allora è anche $\mathcal{G}/\mathcal{G}'$ misurabile per ogni $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}, \mathcal{G}' \subset \mathcal{F}'$
 - ▶ ogni $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ è $2^\Omega/\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}/\{\emptyset, \Omega'\}$ misurabile

$$\Omega \xrightarrow{f} \Omega'$$

$$f(w) = \bar{w}' \quad \forall w \in \Omega$$



$$A' \subset \Omega'$$

$$f^{-1}(A') = \emptyset \quad \text{SE} \quad \begin{matrix} \bar{w}' \notin A' \\ \bar{w}' \in A' \end{matrix}$$

$$\Omega = \Omega'$$

$$f(\omega) = \omega \quad \text{PER OGNI } \omega$$

$$\text{PER OGNI } A' \in \mathcal{F}' \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{MISURABILITÀ} \end{array} \right.$$

$$\underbrace{f^{-1}(A')}_{A'} \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$$

$$f^{-1}(A') = \{ \omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A' \}$$

$$= \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in A' \}$$

$$= A'$$

Misurabilità

Ω

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ σ -algebra in Ω

- ▶ se la σ -algebra di riferimento in $\mathbb{R}^n$ è $\mathcal{B}^n$ (scelta usuale) e si dice semplicemente: f è $\mathcal{F}$ misurabile

PER OGNI $B \in \mathcal{B}^n$
 $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

- ▶ se anche $\Omega = \mathbb{R}^m$ e la σ -algebra è $\mathcal{F} = \mathcal{B}^m$ (scelta usuale) si dice semplicemente: f è misurabile

PER OGNI $B \in \mathcal{B}^n$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^m$

Variabili Aleatorie

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità

► **variabile aleatoria**: una applicazione $\mathcal{F}$ misurabile

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{B}$$

► **vettore aleatorio**: una applicazione $\mathcal{F}$ misurabile

$$X(\omega) = \begin{bmatrix} x_1(\omega) \\ x_2(\omega) \\ \vdots \\ x_n(\omega) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \mathcal{B}^n$$

► un **ente aleatorio** è una applicazione

$$X : \Omega \rightarrow E$$

$\mathcal{F}/\mathcal{E}$ misurabile, con $\mathcal{E}$ σ -algebra su E

Variabili Aleatorie

- $\mathbf{X}$ vettore aleatorio su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

DEFINIZIONE su $\mathcal{F}$
 $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$

- ▶ per ogni Boreliano $B \in \mathcal{B}^n$,

$$\mathbf{X}^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{X}(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

- ▶ notazione:

$$\underline{\mathbf{X}^{-1}(B)} = \underline{\{\mathbf{X} \in B\}} = \text{"}\mathbf{X} \text{ appartiene a } B\text{"} \in \mathcal{F}$$

- ▶ perché si richiede la misurabilità? si può calcolare

$$P(\mathbf{X}^{-1}(B)) = P(\{\mathbf{X} \in B\}) = P(\mathbf{X} \in B)$$

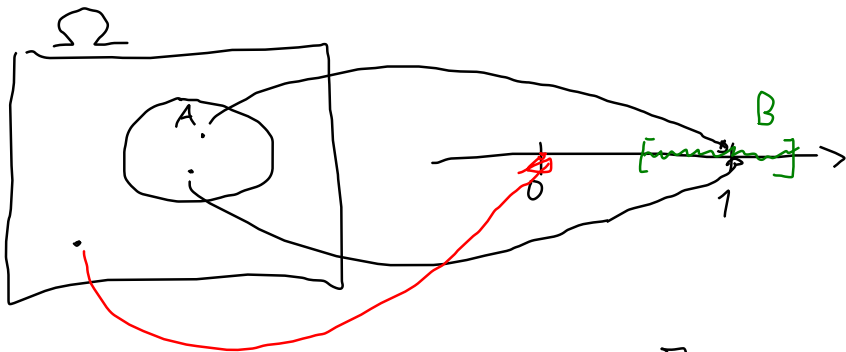
(si possono omettere le parentesi)

Variabili Aleatorie

- Esempio. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $A \subset \Omega$
l'indicatore di A è

$$1_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \notin A \\ 1 & \text{se } \omega \in A \end{cases}$$

- ▶ 1 se A è V, 0 se A è F
- ▶ è una variabile aleatoria $\iff A \in \mathcal{F}$
- Esercizio. Scrivere tramite 1_A e 1_B i seguenti indicatori:
 $1_{\bar{A}}, 1_{A \cup B}, 1_{A \cap B}, 1_{A-B}, 1_{A \Delta B}$



$$\begin{aligned}
 & \mathcal{I}_A \text{ MISURABILE} \iff A \in \mathcal{B} \\
 & \mathcal{I}_A^{-1}(B) = \begin{cases} A & \text{if } 1 \in B, 0 \notin B \\ \Omega & \text{if } 1 \in B, 0 \in B \\ \bar{A} & \text{if } 1 \notin B, 0 \in B \\ \emptyset & \text{if } 1 \notin B, 0 \notin B \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$$

$$1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$$

$$1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$$

Variabili Aleatorie

- Su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- ▶ X **variabile aleatoria semplice** se prende un numero finito di determinazioni ($X(\Omega)$ finito); tutte e sole le variabili aleatorie del tipo

$$X = \sum_{i=1}^m c_i 1_{A_i}$$

con $c_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, m$

- ▶ X **variabile aleatoria discreta** se prende al più un numerabile di determinazioni

$$\underline{X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}}$$

- In uno spazio di probabilità finito (discreto) tutte le variabili aleatorie sono semplici (discrete)

$$X \quad x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$X = \sum_{i=1}^m x_i \cdot 1_{\{X=x_i\}}$$

$$\{X=x_1\}, \dots, \{X=x_m\} \quad \text{PARTIZIONE}$$

Misurabilità

- Proprietà delle applicazioni misurabili

$$\Omega' = \mathbb{R}^m$$

$$\mathcal{F}' = \mathcal{B}^m$$

► [Criterio standard di misurabilità] $(\Omega, \mathcal{F}), (\Omega', \mathcal{F}')$ con
 $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{C}')$
 $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ tale che

$$\sigma(\{PR-R_k TANfol\})$$

$$\underline{f^{-1}(A') \in \mathcal{F}} \text{ per ogni } \underline{A' \in \mathcal{C}'}$$

allora f è $\mathcal{F} / \mathcal{F}'$ misurabile

Prova: mostrare che la classe dei "buoni insiemi"

$$\mathcal{G}' = \{A' \subset \Omega' \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\}$$

è una σ -algebra su Ω'

Misurabilità

- [Criterio standard di misurabilità (II)]

▶ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, se

$$f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F} \text{ per ogni } a \in \mathbb{R}$$

allora f è $\mathcal{F}$ misurabile

▶ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, se

$$f^{-1}((-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_n]) \in \mathcal{F} \text{ per ogni } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

allora f è $\mathcal{F}$ misurabile

▶ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ è misurabile se e solo se ogni f_i è
misurabile

$$f(x) = \sqrt{1+e^x} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f: \underset{\mathbb{B}}{\mathbb{R}} \rightarrow \underset{\mathbb{B}}{\mathbb{R}}$$

$$\underbrace{f^{-1}((-\infty, a])} \in \mathbb{B} \quad \underline{x \in \mathbb{R} \text{ oder } a \in \mathbb{R}}$$

$$\{\omega \in \Omega = \mathbb{R} \mid f(\omega) \in (-\infty, a]\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{1+e^x} \leq a\} = \begin{cases} \emptyset & a < 0 \vee |a| \leq 1 \\ (-\infty, \log(a^2-1)] & a > 1 \end{cases}$$

$$a > 0 \quad \sqrt{1+e^x} \leq a \Leftrightarrow 1+e^x \leq a^2 \Leftrightarrow e^x \leq a^2-1$$

$$a > 1 \quad \Leftrightarrow x \leq \log(a^2-1)$$

$\in \mathbb{B}$

$$a^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq 1 \Leftrightarrow |a| \leq 1$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

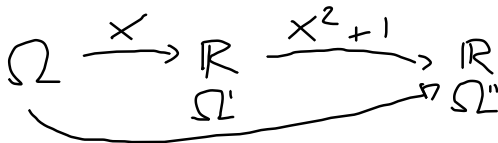
$$f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1+e^x}{x^2+1} \\ x^2+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f^{-1}((-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_n]) &= \{ \omega \in \Omega \mid f(\omega) \in (-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_n] \} \\ &= \{ \omega \in \Omega \mid f_1(\omega) \in (-\infty, a_1], \dots, f_n(\omega) \in (-\infty, a_n] \} \\ &= f_1^{-1}((-\infty, a_1]) \cap \dots \cap f_n^{-1}((-\infty, a_n]) \end{aligned}$$

Misurabilità



- Proprietà delle applicazioni misurabili

► [Composizione] $(\Omega, \mathcal{F}), (\Omega', \mathcal{F}'), (\Omega'', \mathcal{F}'')$

$$f : \Omega \rightarrow \Omega', \quad g : \Omega' \rightarrow \Omega''$$

se $f : \mathcal{F} / \mathcal{F}'$ misurabile, $g : \mathcal{F}' / \mathcal{F}''$ misurabile, allora

$$\underline{g \circ f : \Omega \rightarrow \Omega''}, \quad \underline{g \circ f(\omega) = g(f(\omega))}$$

è $\mathcal{F} / \mathcal{F}''$ misurabile

$$\forall A'' \in \mathcal{F}'' \quad \underbrace{(g \circ f)^{-1}(A'')}_{\in \mathcal{F}'} \in \mathcal{F}$$

$$\underbrace{f^{-1}\left(\underbrace{g^{-1}(A'')}_{\in \mathcal{F}'}\right)}_{\in \mathcal{F}}$$

Misurabilità

- Proprietà delle applicazioni misurabili

► [Operazioni fra funzioni misurabili] $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ misurabili,
allora

$$\begin{aligned} &f + g, \quad f \cdot g, \quad c \cdot f \quad (c \in \mathbb{R}) \\ &\max\{f, g\}, \quad \min\{f, g\} \\ &\frac{1}{f} \quad \left(\text{se } \underline{f(\omega) \neq 0 \text{ per ogni } \omega \in \Omega} \right) \end{aligned}$$

sono $\mathcal{F}$ misurabili

Misurabilità

- Variabili aleatorie estese: a volte conviene considerare applicazioni che prendono valori $+\infty$ e/o $-\infty$

$$\underline{\overline{\mathbb{R}}} = \underline{\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}} = [-\infty, +\infty]$$

(convenzione: $-\infty \leq x \leq +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$)

- σ -algebra dei Boreliani su $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{\mathcal{B}} = \sigma(\underbrace{\{[-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}}_{(-\infty, +\infty)}, (-\infty, +\infty])$$

$(-\infty, +\infty)$ $[-\infty, +\infty)$
 $(-\infty, +\infty]$ $[-\infty, +\infty]$

si ottengono tutti i Boreliani di $\mathbb{R}$ a cui si aggiungono uno o entrambi i simboli $+\infty, -\infty$

Misurabilità

- Proprietà delle applicazioni misurabili; $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità

$f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ misurabile per ogni $n \geq 1$

▶ allora

$$\underbrace{\sup_n f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}}, \quad \underbrace{\inf_n f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}}$$

sono $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{B}}$ misurabili

▶ riesce

$$\begin{aligned} \underline{E_1} &= \{ \underline{\omega \in \Omega} \mid \lim_n \underline{f_n(\omega)} \text{ esiste in } \mathbb{R} \} \in \mathcal{F} \\ \underline{E_2} &= \{ \underline{\omega \in \Omega} \mid \lim_n \underline{f_n(\omega)} \text{ esiste in } \overline{\mathbb{R}} \} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

- ▶ se $P(E_1) = 1$ allora $\lim_n f_n$ è $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{B}}$ misurabile
 se $P(E_2) = 1$ allora $\lim_n f_n$ è $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{B}}$ misurabile

DEFINIRE $\lim_n f_n$
 A PIACERE (=0)
 SU E_1, E_2

$$P(\overline{E_1}) = P(\overline{E_2}) = 0$$

$$\left\{ \sup_n f_n \leq a \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \underbrace{\left\{ f_n \leq a \right\}}_{\in \mathcal{F}}$$

Misurabilità

$$\mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^m$$

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

- ▶ [Continuità implica misurabilità]

se l'insieme dei punti di discontinuità di f è discreto, allora f è misurabile

- ▶ tutte le funzioni di uso pratico da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ sono misurabili

- Esercizio. verificare direttamente che sono misurabili

- ▶ $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = \cos x$

- ▶ $f(x, y) = (x + y, x, y)$

Variabili Aleatorie

- Operazioni con variabili aleatorie, purché ben definite, portano a nuove variabili aleatorie

- ▶ se $X, Y, (X_n)_{n \geq 1}$ sono variabili aleatorie, tali sono

$$c \cdot X (c \in \mathbb{R}), X + Y, X \cdot Y, \left(\frac{X}{Y} \right), \max\{X, Y\}, \min\{X, Y\}$$

$$\sup_n X_n, \inf_n X_n, \lim_n X_n, \sum_n X_n$$

$$f(X) \text{ con } f \text{ misurabile: } e^X, \log X, X^\alpha, \dots$$

$$P(X > 0) = 1$$

$$\log X$$

- ▶ se $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vettore aleatorio, $P(X \in D) = 1$
 $X \in D$ q.c. ($D \in \mathcal{B}^n$),
 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ misurabile, allora $f(X)$ è un (ben definito) vettore
 aleatorio
 se $\omega: X(\omega) \notin D$, DEFINIRE $f(X(\omega))$
 A PIACERE

σ -Algebra Generata da Variabili Aleatorie

- Come definire l'informazione risultante dall'osservazione di una o più variabili aleatorie?
 - ▶ σ -algebra generata da una famiglia di funzioni
 - ▶ misurabilità di una variabile aleatoria rispetto alla σ -algebra generata equivale alla possibilità di ottenere (**funzionalmente**) la variabile aleatoria da quelle generanti la σ -algebra

σ -Algebra Generata da Variabili Aleatorie

$$f_\alpha: \Omega \rightarrow \Omega'_\alpha$$

$\mathcal{F}'_\alpha$

Alg

ANCHE
DIVERSI
 $\forall \alpha$

$$\Omega'_\alpha = \mathbb{R} \quad \forall \alpha$$

$$\mathcal{F}'_\alpha = \mathcal{B}$$

- $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$, $f_\alpha: \Omega \rightarrow \Omega'_\alpha$, $\mathcal{F}'_\alpha$ σ -algebra in Ω'_α ;
la σ -algebra generata da $f_\alpha, \alpha \in I$ è

σ -ALGEBRA
SU Ω

$$\sigma(f_\alpha, \alpha \in I) = \cap \{ \mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ } \sigma\text{-algebra su } \Omega, \quad$$

$$f_\alpha \text{ } \mathcal{G} / \mathcal{F}'_\alpha \text{ misurabile per ogni } \alpha \in I \}$$

$$= \sigma(\{f_\alpha^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{F}'_\alpha, \alpha \in I\})$$

σ -Algebra Generata da Variabili Aleatorie

- $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$, $f_\alpha : \Omega \rightarrow \Omega'_\alpha$, $\mathcal{F}'_\alpha$ σ -algebra in Ω'_α
 $\mathcal{F} = \sigma(f_\alpha, \alpha \in I)$ è la **più piccola σ -algebra su Ω che rende f_α $\mathcal{F}/\mathcal{F}'_\alpha$ misurabile per ogni $\alpha \in I$:**

► $\mathcal{F}$ è una σ -algebra su Ω

► f_α è $\mathcal{F}/\mathcal{F}'_\alpha$ misurabile per ogni $\alpha \in I$

► per ogni σ -algebra $\mathcal{G}$ su Ω tale che f_α è $\mathcal{G}/\mathcal{F}'_\alpha$ misurabile per ogni $\alpha \in I$, è $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ (MINIMALITÀ)

σ -Algebra Generata da Variabili Aleatorie

- Nel caso di un'unica applicazione, la costruzione si semplifica:
 $f : \Omega \rightarrow \Omega'$, $\mathcal{F}'$ σ -algebra in Ω' ; la σ -algebra generata da f è

$$\underline{\sigma(f)} = \cap \{ \mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ } \sigma\text{-algebra su } \Omega, f \text{ è } \mathcal{G} / \mathcal{F}' \text{ misurabile} \}$$

$$\boxed{= \{ f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{F}' \}}$$

è una
 σ -ALGEBRA

è la più piccola σ -algebra su Ω che rende f misurabile

$\sigma(f) = \{ f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{F}' \} \quad \bar{} \text{ È UNA } \sigma\text{-ALGEBRA}$

$$1) \quad A' = \emptyset \quad f^{-1}(A') = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \sigma(f)$$

$$A' = \Omega' \quad f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \sigma(f)$$

$$2) \quad \text{SE } \underbrace{A \in \sigma(f)} \Rightarrow \bar{A} \in \sigma(f)$$

$$A = f^{-1}(A') \text{ con } A' \in \mathcal{F}'$$

$$\bar{A} = \overline{f^{-1}(A')} = f^{-1}(\overline{A'})$$

$\in \mathcal{F}'$

QUINDI $\bar{\bar{A}}$
È UNA
CONTROIMMAGINE

$$3) (A_n)_{n \geq 1} \subset \sigma(f) \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \sigma(f)$$

$$A_n = f^{-1}(A'_n) \text{ con } A'_n \in \mathcal{F}'$$

$$\bigcup A_n = \bigcup f^{-1}(A'_n) = f^{-1}(\underbrace{\bigcup A'_n}_{\in \mathcal{F}'})$$

QUINDI $\sigma(f)$ È UNA σ -ALGEBRA
 ED È LA PIÙ PICCOLA CHE RENDE
 f MISURABILE

$$f_{\alpha_1}^{-1}(A'_1) \cup f_{\alpha_2}^{-1}(A'_2)$$

Variabili Aleatorie

$$\begin{array}{ccc} \sigma(X) & \subset & \sigma(X, Y) & \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \uparrow & & \uparrow & \\ \end{array}$$

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità

- ▶ X variabile aleatoria

$$\sigma(X) = \underbrace{\{\{X \in B\} \mid B \in \mathcal{B}\}}_{X^{-1}(\mathcal{B})}$$

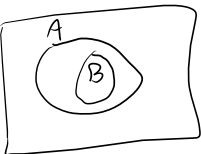
informazione data dall'osservazione di X

- ▶ $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ variabili aleatorie

$$\sigma(X_\alpha, \alpha \in I) = \underbrace{\sigma(\{\{X_\alpha \in B\} \mid B \in \mathcal{B}, \alpha \in I\})}_{X_\alpha^{-1}(\mathcal{B})}$$

informazione data dall'osservazione di ogni $X_\alpha, \alpha \in I$

Variabili Aleatorie



- $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio misurabile, $A \in \mathcal{F}$ è un **atomo** di $\mathcal{F}$ se $A \neq \emptyset$ e se $B \in \mathcal{F}, B \subset A \Rightarrow B = \emptyset$ o $B = A$

- ▶ [misurabilità $\equiv$ costanza sugli atomi] $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ misurabile, A atomo di $\mathcal{F}$ allora f è costante su A
- ▶ [misurabilità rispetto a partizioni] $\mathbb{P}$ partizione discreta di Ω , $\mathcal{F} = \sigma(\mathbb{P})$ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è $\mathcal{F}$ misurabile se e solo se f è **costante su ognuno degli atomi** di $\mathbb{P}$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad f \text{ MISURABILE}$$

$$A \text{ ATOMO DI } \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad f \text{ È COSTANTE SU } A$$

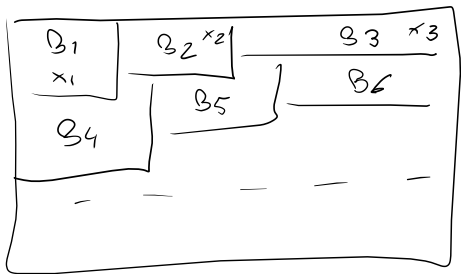
$$\bar{\omega} \in A \in \mathcal{F} \quad f(\bar{\omega}) = \bar{x} \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{f^{-1}(\{\bar{x}\}) \cap A}_{\neq \emptyset} \subset A$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\{\bar{x}\}) \cap A = A$$

$$\Rightarrow A \subset f^{-1}(\{\bar{x}\})$$

cioè f È COSTANTE SU A



OGNI B_n È UN
ATOMO DI $\sigma(P)$

$$\mathcal{P} = (B_n)_{n \geq 1}$$

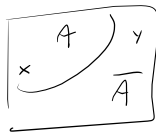
$$\sigma(\mathcal{P}) = \left\{ \bigcup_{n \in I} B_n \mid I \subset \mathbb{N} \right\}$$

$$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\sigma(\mathcal{P})$

f È COSTANTE SU
OGNUNO DEI B_n

Variabili Aleatorie



f COSTANTE
SU A E
SU $\bar{A}$

- Esempio.

► $\sigma(1_A) = \sigma(\{A, \bar{A}\}) = \sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ ✓
 f è $\sigma(1_A)$ misurabile se costante su A e $\bar{A} \iff \underline{f \text{ è funzione di } 1_A}$ $f = x 1_A + y 1_{\bar{A}} = y + (x-y) 1_A$

► X variabile aleatoria discreta con determinazioni $x_1, x_2, \dots$

$\{X \in B\} = \bigcup_{x_i \in B} \{X = x_i\}$ $\sigma(X) = \sigma(\underbrace{\{\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots, \{X = x_n\}, \dots\}}_{\text{PARTIZIONE}})$
 se Y è $\sigma(X)$ misurabile $\iff \underbrace{Y \text{ è funzione di } X}_{\text{ATOMI}}$

$$Y = g(X)$$

Variabili Aleatorie

- [misurabilità rispetto variabili aleatorie]

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$
sono equivalenti

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \textcircled{2}$$

- ① Y è $\sigma(X)$ misurabile

$$\textcircled{1} \Leftarrow \textcircled{3}$$

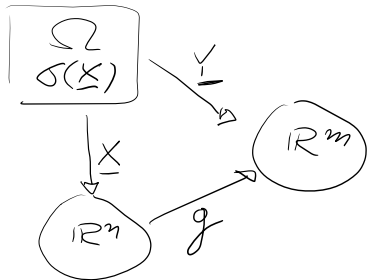
- ② $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$

- ③ esiste una funzione $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ misurabile tale che

$$\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{3}?$$

$$Y = g(X)$$

- Y è $\sigma(X)$ misurabile: significa che si può calcolare Y partendo da X



Variabili Aleatorie

- Esercizio. $X_1, \dots, X_n$ variabili aleatorie,

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = X_1 + X_2$$

.....

$$Y_n = X_1 + \dots + X_n$$

$$X_2 = Y_2 - Y_1$$

$$X_3 = Y_3 - Y_2$$

$$\dots \quad X_n = Y_n - Y_{n-1}$$

mostrare che

OVVIA, DA $(X_1, \dots, X_n)$ POSSO
CALCOLARE $Y_1, \dots, Y_n$

$$\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$$

- Esercizio. X e Y sono variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $c \in \mathbb{R}$;
mettere in ordine crescente di inclusione

$$\mathcal{F}, \sigma(X, X+Y), \sigma(|X|), \sigma(X), \sigma(X+Y, X-Y),$$

$$\sigma(X^2), \sigma(X, Y), \{\emptyset, \Omega\}, \sigma(X+c), \sigma(X, X^2 - Y^2).$$

$$\{\phi, \Omega\} \subset \sigma(x^2) = \sigma(|x|) \subset \sigma(x) = \sigma(x+c) \subset$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ = \begin{array}{ccc} SE & S' & SA \\ CHE & X \geq 0 & \end{array} \end{array}$$

$$x^2 = |x|^2$$

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

$$\subset \sigma(x, x^2 - y^2) \subset \sigma(x, y) = \sigma(x, x+y) = \sigma(x+y, x-y)$$

$$\subset \overline{\sigma}$$

Variabili Aleatorie

- Esercizio. Lancio di due dadi, X_1, X_2 risultato del primo e secondo dado; $Z = X_1 + X_2$, $W = X_1 \cdot X_2$, $U = \min\{X_1, X_2\}$, $V = \max\{X_1, X_2\}$; dire quali delle seguenti relazioni sono V o F

① $\sigma(X_1 \cdot X_2) \stackrel{?}{=} \sigma(Z, W)$ F $Z = 7, W = 12$

② $\sigma(X_1 \cdot X_2) \stackrel{?}{=} \sigma(U, V)$ F $U = 3, V = 4$

VERA ③ $\sigma(Z, U) = \sigma(Z, V)$ $Z = X_1 + X_2 = U + V$

$V - U = |X_1 - X_2|$ ④ $\sigma(X_1 - X_2) = \sigma(V - U, 1_{\{X_1 > X_2\}})$ $X_1 - X_2 = \begin{cases} V - U & \text{se } 1_{\{X_1 > X_2\}} = 1 \\ -(V - U) & \text{se } 1_{\{X_1 > X_2\}} = 0 \end{cases}$

$1_{\{X_1 > X_2\}} = 1_{\{X_1 - X_2 > 0\}}$ ⑤ $\sigma(X_1, U) = \sigma(X_2, V)$

⑥ $\sigma(Z) \cap \sigma(W) \neq \{\emptyset, \Omega\}$ $\{Z = 2\} = \{W = 1\}$

⑦ $\sigma(U) \cap \sigma(V) = \{\emptyset, \Omega\}$

$$\sigma(x_1, v) \neq \sigma(x_2, v)$$

$$x_1 = 2 = v \quad x_2 = v?$$

$$x_2 = v = 5 \quad x_1 = v?$$

$$\{z=4\} = \{(1,3), (2,2), (3,1)\} \neq \{w=3, w=4\}$$

$$\{z=3\} = \{(1,2), (2,1)\} = \{w=2\}$$

$$\sigma(U) \cap \sigma(V) = \{\phi, \Omega\}$$

$$\{U=6\} = \{(6,6)\} \subset \{V=6\}$$