

Leggi di Variabili Aleatorie

Variabili Aleatorie Multivariate

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità
 $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vettore di variabili aleatorie (va)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

- ▶ $\mathbf{X}$ è $\mathcal{F}$ misurabile se e solo se ogni X_i è $\mathcal{F}$ misurabile (p. 76)
- ▶ per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\underline{I_{\mathbf{x}} = I_{(x_1, \dots, x_n)} = (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]}$$

iper-rettangolo chiuso illimitato

Legge e Funzione di Ripartizione

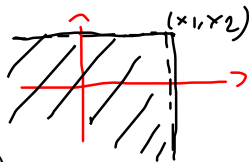
- **Misura immagine/legge/distribuzione** di $\mathbf{X}$: per ogni $B \in \mathcal{B}^n$,

$$\underline{P_{\mathbf{X}}(B) = P(\mathbf{X} \in B) = P(\mathbf{X}^{-1}(B))}$$

probabilità su $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$

- **Funzione di ripartizione congiunta** ($\equiv$ cdf) di $\mathbf{X}$: restrizione di $P_{\mathbf{X}}$ agli iper-rettangoli

$$\begin{aligned}\underline{F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} &= \underline{P_{\mathbf{X}}(I_{\mathbf{x}})} \\ &= P(\mathbf{X} \in I_{\mathbf{x}}) \\ &= \underline{P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)}\end{aligned}$$



per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, quindi $\boxed{F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}}$ $[0, 1]$

Funzione di Ripartizione

- Proprietà di $F_{\mathbf{X}}$

- ① $F_{\mathbf{X}}$ **non decrescente**: se $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ con $x_i \leq y_i$ per ogni i

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \leq F_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n)$$

- ② $F_{\mathbf{X}}$ **continua "da sopra"**: per ogni $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{y_1 \downarrow x_1, \dots, y_n \downarrow x_n} F_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n) = F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$$

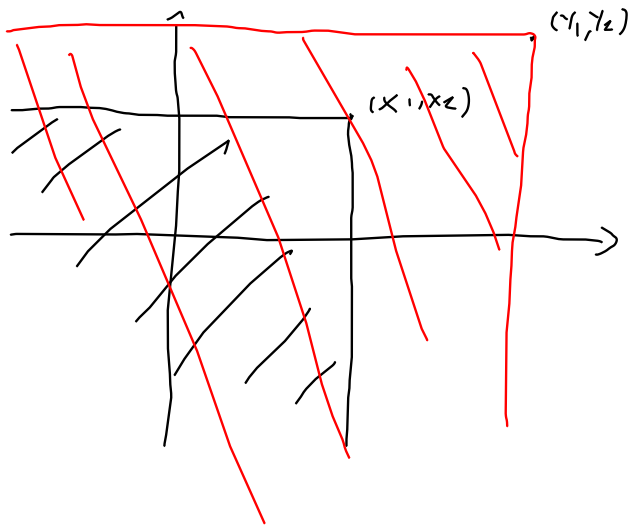
- ③ **limiti**: per ogni i fissato e per ogni $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

inoltre

$$\lim_{x_1 \uparrow +\infty, \dots, x_n \uparrow +\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = 1$$

1



MONOTONIA
DELLA
F.O.B.

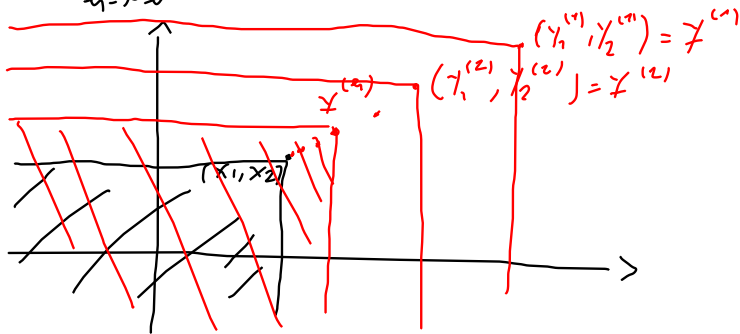
2

$$\lim_{y_1 \downarrow x_1, \dots, y_n \downarrow x_n} F_X(\underline{y}) = F_X(\underline{x})$$

PRENDIAMO UNA SUCCESSIONE DI

PUNTI $\underline{y}^{(n)} = (y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)})$

CON $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{y}^{(n)} = \underline{x} \quad \text{e} \quad x_i < y_i^{(n)} < y_i^{(n-1)}$



$$A_{e_n} = \{ \underline{X} \in I_{\gamma^{(e_n)}} \} = \{ X_1 \leq \gamma_1^{(e_n)}, \dots, X_n \leq \gamma_n^{(e_n)} \}$$

$$A_{e_n} \supset A_{e_{n+1}}$$

$$P \left(\underbrace{\lim_n A_{e_n}}_{\bigcap_{e_n} A_{e_n}} \right) = \lim_n \underbrace{P(A_{e_n})}_{F_{\underline{X}}(\gamma^{(e_n)})}$$

$$\bigcap_n \{ X_1 \leq \gamma_1^{(e_n)}, \dots, X_n \leq \gamma_n^{(e_n)} \} = \{ X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n \}$$

Funzione di Ripartizione

- Proprietà di $F_{\mathbf{X}}$

- 4 per ogni $a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$

$$\Delta_{a_1, b_1}^{(1)} \Delta_{a_2, b_2}^{(2)} \dots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F_{\mathbf{X}} \geq 0$$

dove

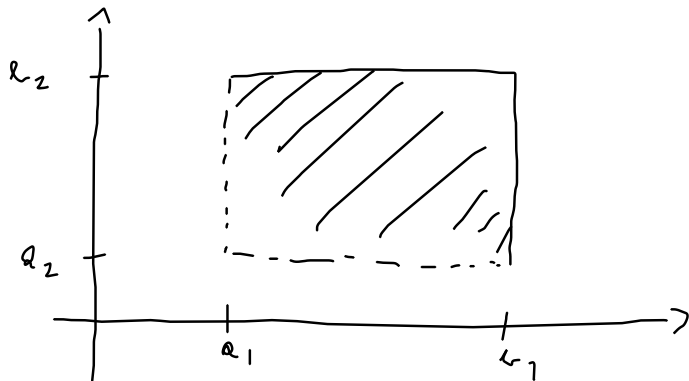
$$\Delta_{a,b}^{(i)} g(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, b, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, a, \dots, x_n)$$

(in posizione i -esima)

- 5 per ogni iper-rettangolo limitato $I = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$ con $a_i < b_i$ per ogni i ,

$$\begin{aligned} P(\mathbf{X} \in I) &= P(a_1 < X_1 \leq b_1, \dots, a_n < X_n \leq b_n) \\ &= \Delta_{a_1, b_1}^{(1)} \Delta_{a_2, b_2}^{(2)} \dots \Delta_{a_n, b_n}^{(n)} F_{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

$n=2$ $q_1 < l_1$ $q_2 < l_2$

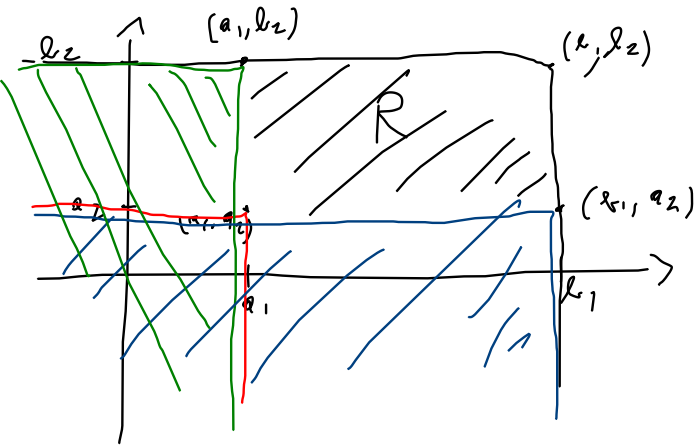


$$\Delta_{a_1, l_1}^{(1)} \underbrace{\Delta_{a_2, l_2}^{(2)} F_{(x_1, x_2)}}_{F(x_1, l_2) - F(x_1, a_2)} \geq 0$$

$$F(l_1, l_2) - F(l_1, a_2) - F(a_1, l_2) + F(a_1, a_2)$$

$$= P(a_1 < X_1 \leq l_1, a_2 < X_2 \leq l_2)$$

$$P(X_1 \leq l_1, X_2 \leq l_2) = F(l_1, l_2)$$



$$\{x_1 \leq l_1, x_2 \leq l_2\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}\} \cup \{\underline{x} \in I_{(a_1, l_2)}\} \\ \cup \{\underline{x} \in I_{(l_1, a_2)}\}$$

$$\bar{F}(l_1, l_2) = P(\underline{x} \in \mathbb{R}) + F(a_1, l_2) + \bar{F}(l_1, a_2) \\ - 0 - 0 - F(a_1, a_2) + 0$$

Funzione di Ripartizione

- Proprietà di $F_{\mathbf{X}}$

⑥ per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} P(\mathbf{X} \in \text{Int}(I_{\mathbf{x}})) &= \\ &= P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n) \\ &= \lim_{y_1 \uparrow x_1, \dots, y_n \uparrow x_n} F_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

⑦ per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} P(\mathbf{X} \in \text{Fr}(I_{\mathbf{x}})) &= \\ &= P(X_i \leq x_i \text{ per ogni } i, \text{ esiste } j \text{ tale che } X_j = x_j) \\ &= F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) - \lim_{y_1 \uparrow x_1, \dots, y_n \uparrow x_n} F_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

dove $\text{Fr}(B) = B - \text{Int}(B)$

Funzione di Ripartizione

- Osservazione:

- ▶ $P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) > 0$ **massa concentrata** in $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
- ▶ (4), (5): se $F_{\mathbf{X}}$ continua in $\mathbf{x} \Rightarrow$ non c'è massa concentrata in $\mathbf{x}$
- ▶ $P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \not\Rightarrow F_{\mathbf{X}}$ continua in $\mathbf{x}$
- ▶ (6): discontinuità di $F_{\mathbf{X}}$ in $\mathbf{x} \Leftrightarrow P(\mathbf{X} \in \text{Fr}(I_{\mathbf{x}})) > 0$
- ▶ la situazione si semplifica nel caso univariato $n = 1$:
discontinuità della cdf corrispondono a masse concentrate

Funzione di Ripartizione

- Teorema: per ogni funzione $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ che soddisfa (2), (3), (4) (nota come funzione di ripartizione congiunta)

- ▶ esiste un'unica probabilità P su $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ tale che

$$P(I_{\mathbf{x}}) = F(\mathbf{x})$$

per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

- ▶ esiste un vettore di va $\mathbf{X}$ su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tale che $F_{\mathbf{X}} = F$

- Quindi

- ▶ ogni prob. su intervalli si estende **unicamente** ai Boreliani
- ▶ si può specificare una cdf senza indicare lo spazio di probabilità

CHI $\bar{E} (\Omega, \mathcal{F}, P) ?$

$\mathbb{R}^n \quad \mathcal{B}^n \quad P \rightarrow$ DETERMINATA DA F

$X(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \quad (\text{FUNZIONI IDENTICA})$

Funzione di Ripartizione Univariata

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, X va; la legge di X è

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B), \quad B \in \mathcal{B}$$

► P_X è un probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

- La funzione di ripartizione di X , $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \in (-\infty, x]) = P(X \leq x) \quad x \in \mathbb{R}$$

Funzione di Ripartizione Univariata

- Proprietà della funzione di ripartizione
 - ❶ F_X non decrescente
 - ❷ F_X continua a destra
 - ❸ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
 - ❹ se $x < y$, $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$,
 $P(X > x) = 1 - F_X(x)$
 - ❺ $P(X < x) = \lim_{y \uparrow x} F_X(y) \equiv F_X(x-)$
 - ❻ $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-) \Rightarrow$ discontinuità di F_X
corrispondono a masse concentrate

Funzione di Ripartizione

- Due v.a. $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ tali che $F_{\mathbf{X}} = F_{\mathbf{Y}}$, cioè $P_{\mathbf{X}} = P_{\mathbf{Y}}$, hanno la stessa legge, scritto

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$$

- ▶ da un punto di vista probabilistico, $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sono uguali
- ▶ se $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ q.c. allora $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$ ma non viceversa!
- ▶ ESEMPIO. $X = 1_A$ con $P(A) = 1/2$, $Y = 1_{\bar{A}}$

Distribuzioni Marginali

- Distribuzioni **marginali**

- ▶ la **marginale univariata** di X_i si ottiene con

$$F_{X_i}(x) = \lim_{x_j \rightarrow +\infty, j \neq i} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

- ▶ se $J \subset \{1, \dots, n\}$, la **marginale congiunta** di

$$\mathbf{X}_J = [X_i, i \in J]$$

si ottiene con

$$F_{\mathbf{X}_J}(x_i, i \in J) = \lim_{x_j \rightarrow +\infty, j \notin J} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$$

Dipendenza e Leggi Marginali

- **Teorema di Sklar**: dato $\mathbf{X}$ va esiste una cdf $C(\mathbf{u}) : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ (la **copula di $\mathbf{X}$**) con

$$C(1, \dots, u_i, \dots, 1) = u_i, \quad i = 1, \dots, n$$

tale che

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n))$$

per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

C è unica se $F_{\mathbf{X}}$ è continua

- ▶ le marginali di C sono $U(0,1)$
- ▶ la legge congiunta si **disaggrega** nelle marginali e nella copula ($\equiv$ la dipendenza di $\mathbf{X}$)

Variabili Aleatorie

- $\mathbf{X}$ va con cdf $F_{\mathbf{X}}$

$$\begin{aligned} S &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) > 0}_{F_{\mathbf{X}} \text{ discontinua in } \mathbf{x}}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid F_{\mathbf{X}} \text{ discontinua in } \mathbf{x}\} \quad \text{caso univariato} \end{aligned}$$

▶ S è discreto

▶ Lemma: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $(A_{\alpha})_{\alpha \in I}$ a due a due disgiunti con $A_{\alpha} \in \mathcal{F}$ e $P(A_{\alpha}) > 0$ per ogni $\alpha \Rightarrow I$ è discreto

- Osservazione: quando $n > 1$, le discontinuità di $F_{\mathbf{X}}$ possono essere più che numerabili

$(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ $P(A_\alpha) > 0$ A OVE A OVE DISGIUNTI

$\Rightarrow I$ è DISCRETO

$$I_n = \{\alpha \in I \mid P(A_\alpha) > \frac{1}{n}\} \subset I$$

$$I_1 = \emptyset$$

$$\#I_2 \leq 1$$

$$P(A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2}) = \underbrace{P(A_{\alpha_1})}_{> 1/2} + \underbrace{P(A_{\alpha_2})}_{> 1/2} > 1$$

$$\#I_n \leq n-1$$

$$\bigcup_{n \geq 1} I_n = I \Rightarrow I \text{ è (AL PIÙ) NUMERABILE}$$

$$\Rightarrow I \text{ è DISCRETO}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(X=x) > 0\}$$

GLI EVENTI $\{X=x\}, x \in S$ SONO
 A OVE A OVE DISGIUNTI E DI PROB.
 POSITIVA

Variabili Aleatorie

- $\mathbf{X}$ va con cdf $F_{\mathbf{X}}$

$$\begin{aligned} S &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid F_X \text{ discontinua in } x\} \quad \text{caso univariato} \end{aligned}$$

- Sia $\lambda = \sum_{x \in S} P(X = x) \in [0, 1]$ *SOMMA DI TUTTE LE MASSE CONCENTRATE*
 - ▶ $\mathbf{X}$ discreta: $\lambda = 1$
 - ▶ $\mathbf{X}$ continua: F_X continua $\Rightarrow \lambda = 0, (S = \emptyset)$
 - ▶ $\mathbf{X}$ mista: $0 < \lambda < 1$

$n=1$ Variabile Aleatoria Discreta Univariata

- Va X discreta: insieme dei valori $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ **finito o numerabile**

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

- ▶ F_X costante tra due determinazioni successive
- ▶ massa di probabilità pari a $P(X = x_i) = p_i$ in x_i
- ▶ spesso si assegnano direttamente i valori $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ e le masse $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ con

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i \geq 1} p_i = 1$$

- ▶ allora è una cdf

$$P(X \leq x) = P\left(\bigcup_{x_i \leq x} \{X = x_i\}\right) = \sum_{x_i \leq x} \overbrace{P(X = x_i)}^{p_i}$$
$$F_X(x) = \sum_{i: x_i \leq x} p_i$$

inoltre per ogni Boreliano B , $P(X \in B) = \sum_{i: x_i \in B} p_i$

Variabile Aleatoria Discreta Univariata

- ESEMPIO.

- ▶ $X = c$ q.c. **degenere**
- ▶ $X = 1_A$, $P(A) = p$; $X \sim$ **Bernoulli**(p)
- ▶ $X \sim$ **Binomiale**(n, p) con $n \geq 1$, $0 < p < 1$

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, i = 0, \dots, n$$

X = numero di successi in n prove indipendenti ed equiprobabili

- ▶ $X \sim$ **Poisson**(λ) con $\lambda > 0$

$$P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, i = 0, 1, 2, \dots$$

Variabile Aleatoria Discreta Univariata

- ESERCIZIO. Siano $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ eventi (prove) indipendenti ed equiprobabili con $P(E_n) = p$ per ogni n
 - ▶ trovare la distribuzione del numero di insuccessi X prima di vedere il primo successo (distribuzione **geometrica**)
 - ▶ trovare la cdf di X (usare $\lfloor x \rfloor = \text{massimo intero} \leq x$)
 - ▶ trovare la distribuzione di Y_k , numero di insuccessi prima di vedere il k -esimo successo, con $k \geq 1$ (distribuzione **binomiale negativa**)

Variabile Aleatoria Continua Univariata

$$\lambda = 0 \quad (S \neq \emptyset)$$

- Va X continua: la cdf F_X è continua

▶ quindi $P(X = x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

- ▶ caso particolare: X dotata di densità f_X se F_X è assolutamente continua, cioè esiste $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, integrabile, tale che

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du,} \quad x \in \mathbb{R}$$

- ▶ notazione: funzione densità di probabilità $\equiv$ pdf

CI SONO
ESEMPLI DI
 F_X CONTINUE
MA NON DOTATE
DI DENSITÀ
(ESEMPIO DI CANTOR)

Densità di Probabilità

- Va X assolutamente continua

- ▶ spesso si assegna direttamente la pdf $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile con

$$\underline{f(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R},} \quad \underline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = 1}$$

- ▶ allora

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du, \quad x \in \mathbb{R}$$

è una (cdf) (assolutamente) continua

- ▶ inoltre per ogni Boreliano B , $\underline{P(X \in B) = \int_B f_X(u) du}$

VERIFICA
LE PROPRIETÀ
(i)(ii)(iii) ✓
SI P. 102

Densità di Probabilità

- Proprietà della densità: X va con pdf f_X e cdf F_X

► [Densità da funzione di ripartizione (I)] se f_X continua in $x \in \mathbb{R}$

$$\underline{f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x)} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F_X(x+\Delta) - F_X(x)}{\Delta}$$

e quindi

$$\begin{aligned} P(x < X \leq x + \Delta) &= F_X(x + \Delta) - F_X(x) \\ &= f_X(x)\Delta + o(\Delta) \\ &\approx f_X(x)\Delta \end{aligned}$$

("o piccolo": ogni funzione tale che $o(z)/z \rightarrow 0$ se $z \rightarrow 0$)

► [Densità da funzione di ripartizione (II)]

$$\boxed{f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) \text{ q.o.}}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F_x(x+\Delta) - F_x(x)}{\Delta} = f_x(x)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F_x(x+\Delta) - F_x(x) - \Delta \cdot f_x(x)}{\Delta} = 0$$

$$= o(\Delta)$$

$$\Delta > 0$$

$$\underbrace{F_x(x+\Delta) - F_x(x)}_{P(x < X \leq x+\Delta)} = \Delta \cdot f_x(x) + o(\Delta)$$

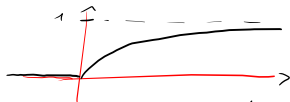
$$\approx \Delta \cdot f_x(x)$$

Densità di Probabilità

- Proprietà della densità: X va con pdf f_X e cdf F_X
 - ▶ [Unicità] f_X è unica q.o., cioè g è un'altra pdf per X se e solo se $f_X = g$ q.o.
 - ▶ in particolare, si può alterare arbitrariamente f_X su un insieme discreto ottenendo una nuova pdf per X

Densità di Probabilità

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



- Proprietà della densità: X va continua con cdf F_X

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- [Derivata e densità] se F_X è derivabile con continuità tranne che su un insieme discreto

$$\dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots,$$

cioè

$$\frac{dF_X}{dx}(x) = F'_X(x)$$

esiste ed è continua tranne che per $x = \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$, allora

F'_X è una pdf per X (definire arbitrariamente F'_X sugli x_i)

Densità di Probabilità

- ESEMPIO.

- ▶ X **uniforme** su (a, b) (con $a < b$); $X \sim U(a, b)$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \text{ se } a \leq x \leq b; \quad 0 \text{ altrimenti}$$

- ▶ **distribuzione gamma**, $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ (con $\alpha > 0, \lambda > 0$)

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \text{ se } x \geq 0; \quad 0 \text{ altrimenti}$$

$\Gamma(\cdot)$ è la **funzione gamma**:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx, \quad \alpha > 0$$

(alcune proprietà: $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$)

- ▶ X **esponenziale**, $X \sim \text{Exp}(\lambda) \equiv \text{Gamma}(1, \lambda)$

Densità di Probabilità

- ESEMPIO.

- ▶ X **normale** di parametri μ, σ^2 ; $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\phi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right)$$

- ESERCIZIO. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

- ▶ trovare la cdf di X
- ▶ trovare la distribuzione di $Y = 1 - e^{-\lambda X}$
- ▶ trovare la distribuzione di $Z = X^{1/\gamma}$ con $\gamma > 0$

Densità di Probabilità

F_Y IN TERMINI DI F_X
POI DERIVATE PER
TROVARE LA DENSITÀ

- ESERCIZIO.

- ▶ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; trovare la pdf di $Y = e^X$ (distribuzione **lognormale**(μ, σ^2))
- ▶ trovare una formula per la densità di $Y = g(X)$ se X ha densità f_X e g è strettamente crescente o decrescente

Legge di una Variabile Aleatoria

- **Mistura** di funzioni di ripartizione

▶ se F_1, F_2 sono cdf, allora tale è

$$\underline{G = \lambda F_1 + (1 - \lambda) F_2}$$

per ogni $0 \leq \lambda \leq 1$ (mistura di F_1, F_2 con pesi $\lambda, 1 - \lambda$)

▶ se X_1, X_2 sono va con cdf F_1, F_2 , allora G è la cdf della
"lotteria" Y in cui si riceve X_1 con prob. λ e X_2 con prob. $1 - \lambda$

SODDISFA (i), (ii), (iii)
di P. 102

~~$\lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2$~~

Legge di una Variabile Aleatoria

- **Mistura** di funzioni di ripartizione

- ▶ costruzione: sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ su cui X_1, X_2 sono definite, sia $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = \lambda$, A indipendente da X_1, X_2 e

$$Y = 1_A \cdot X_1 + 1_{\bar{A}} \cdot X_2 = \begin{cases} X_1 & \text{se } A \text{ è V} \\ X_2 & \text{se } A \text{ è F} \end{cases}$$

- ▶ se entrambe F_1, F_2 sono discrete (continue) $\Rightarrow G$ è discreta (continua); cosa succede se F_1 è discreta e F_2 continua?

- Si estende al caso di n cdf (o un numerabile/continuo)

$$Y = 1_A X_1 + 1_{\bar{A}} X_2 \quad \text{MA CDF} \quad G = \lambda F_1 + (1-\lambda) F_2$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \frac{P(A)}{\lambda} \underbrace{P(Y \leq y | A)}_{P(X_1 \leq y | A)} + \frac{P(\bar{A})}{1-\lambda} \underbrace{P(Y \leq y | \bar{A})}_{P(X_2 \leq y | \bar{A})}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{F_1(y)} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{F_2(y)}$

$$= G(y)$$

Variabile Aleatorie Miste

- Variabile aleatoria X di tipo misto: nè discreta nè continua

▶ sia $S = \{x \in \mathbb{R} \mid P(X = x) > 0\}$, con $0 < \sum_{x \in S} P(X = x) = \lambda < 1$

▶ parte discreta di F_X :

$$F_d(x) = \sum_{y \in S, y \leq x} P(X = y) = \sum_{y \in S, y \leq x} (F_X(y) - F_X(y-))$$

$\Rightarrow \tilde{F}_d = \frac{1}{\lambda} F_d$ è una cdf discreta

▶ parte continua:

$$\tilde{F}_c(x) = F_X(x) - F_d(x)$$

$\Rightarrow \tilde{F}_c = \frac{1}{1-\lambda} F_c$ è una cdf continua

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_d(x) = \lambda < 1$

$F_X(x) = F_d(x) + F_c(x)$
 $= \lambda \tilde{F}_d(x) + (1-\lambda) \tilde{F}_c(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_c(x) = 1 - \lambda$

Variabile Aleatorie Miste

- Variabile aleatoria X di tipo misto: nè discreta nè continua

▶ quindi

$$F_X = F_d + F_c = \lambda \tilde{F}_d + (1 - \lambda) \tilde{F}_c$$

- ▶ spesso si assegnano direttamente i valori $x_1, \dots, x_n, \dots$ e le masse $p_1, \dots, p_n, \dots$ con

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i \geq 1} p_i = \lambda < 1$$

e la “densità” $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile tale che

$$f(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 - \lambda < 1$$

e si definisce direttamente la cdf

$$F_X(x) = \sum_{i: x_i \leq x} p_i + \int_{-\infty}^x f(u) du$$

Variabile Aleatorie Miste

- ESERCIZIO.

- ▶ Edificio dal valore di 100m€ soggetto a rischio incendio; con prob. 50% non c'è incendio; con prob 5% l'incendio distrugge l'edificio completamente; con prob. 45%, il danno da incendio è distribuito uniformemente tra 0 e 100m€ trovare la cdf del danno X
- ▶ X danno totale di un portafoglio con distribuzione $\text{Exp}(\lambda)$; cessione in un trattato riassicurativo stop loss con franchigia d e limite l (con $l > d$)

$$Y = \min\{\max\{X - d, 0\}, l - d\}$$

trovare la cdf di Y = perdita ceduta al riassicuratore

$$x_1 = 0 \quad p_1 = 0.5$$

$$x_2 = 100 \quad p_2 = 0.05$$

$$\lambda = 0.55$$

$$f(x) = K \quad 0 \leq x \leq 100$$

$$\underbrace{\int_0^{100} f(x) dx}_{100 \cdot K} = 0.45$$

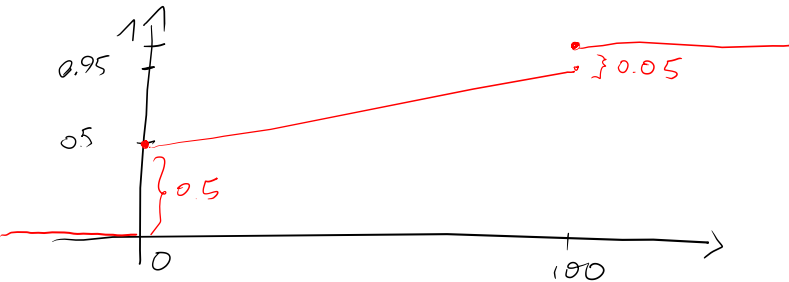
$$100 \cdot K$$

$$K = \frac{0.45}{100} = 0.0045$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.5 + 0.0045 \cdot x & 0 \leq x < 100 \\ 1 & x \geq 100 \end{cases}$$

PER $0 \leq x < 100$

$$F_X(x) = 0.5 + \int_0^x \underbrace{f(u)}_K du = 0.5 + 0.0045 \times x$$



Variabili Aleatorie Multivariate

- Caso discreto:

- ▶ tutte le variabili sono discrete: X_i ha valori $x_1^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}, \dots$
- ▶ massa di probabilità congiunta: per ogni $j_1, \dots, j_n$

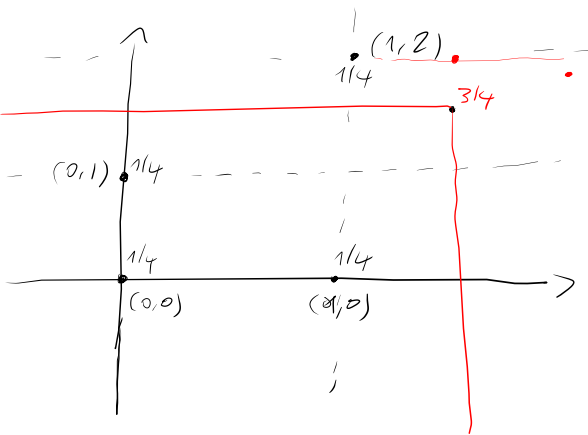
$$p_{j_1, \dots, j_n} = P(X_1 = x_{j_1}^{(1)}, \dots, X_n = x_{j_n}^{(n)})$$

- ▶ basta assegnare

$$p_{j_1, \dots, j_n} \geq 0 \quad \text{per ogni } j_1, \dots, j_n$$
$$\sum_{j_1, \dots, j_n} p_{j_1, \dots, j_n} = 1$$

e la cdf congiunta è

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{x_{j_1}^{(1)} \leq x_1, \dots, x_{j_n}^{(n)} \leq x_n} p_{j_1, \dots, j_n}$$



$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$

$$= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$

$$P(X_1 = x) = \begin{cases} 1/2 & x=0 \\ 1/2 & x=1 \end{cases}$$

$$P(X_2 = x) = \begin{cases} 1/2 & x=0 \\ 1/4 & x=1 \\ 1/4 & x=2 \end{cases}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà della massa di probabilità congiunta
 - ▶ [**Masse marginali**] si ottengono sommando rispetto agli indici delle variabili rimanenti: la massa di prob. di X_i è

$$P(X_i = x_i) = \sum_{\underbrace{j_1, \dots, j_n}_{\text{tutte tranne } i}} p_{j_1, \dots, i, \dots, j_n}$$

- ESERCIZIO. Trovare la legge congiunta del minimo U e massimo V di 2 dadi

LANCIO DI DUE DADI

$$U = \min(X_1, X_2) \quad V = \max(X_1, X_2)$$

U

	V					
	1	2	3	4	5	6
1	1/36	2/36				
2	0	1/36		2/36		
3	0					
4	0					
5	0					2/36
6	0					1/36

L'ANCIO UN DADO n = 10 VOLTE Variabili Aleatorie Multivariate

$$P(X_1=2, X_2=0, X_3=0, X_4=3, X_5=2, X_6=3) = \binom{10}{2} \binom{8}{3} \binom{5}{2} \binom{3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$$

- ESEMPIO. **Distribuzione multinomiale:** n prove indipendenti, ognuna delle quali può avere k esiti mutualmente esclusivi con prob. $p_1, \dots, p_k \geq 0$, $p_1 + \dots + p_k = 1$; X_i = numero di volte in cui si verifica l'esito i

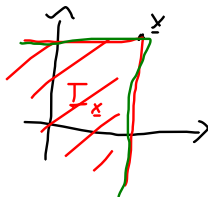
$$\begin{aligned}
 P(X_1 = j_1, \dots, X_k = j_k) &= \frac{n!}{j_1! \dots j_k!} p_1^{j_1} \dots p_k^{j_k} \quad \text{se } j_1 + \dots + j_k = n \\
 &= 0 \quad \text{altrimenti}
 \end{aligned}$$

le marginali sono Binomiali(n, p_i)

Variabili Aleatorie Multivariate

- Caso **continuo**: la cdf congiunta F_X è continua,

$$\underline{P(\mathbf{X} \in \text{Fr}(I_x)) = 0}$$



per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

- ▶ ogni marginale è continua (non viceversa!)
- ▶ tipicamente, nel caso assolutamente continuo, si assegna una densità congiunta $f_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, integrabile, tale che

$$f_X(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ per ogni } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$$

e allora

VERIFICA
(2), (3), (4)

è una cdf multivariata continua

$$\boxed{F_X(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(\mathbf{u}) d\mathbf{u}} = \int_{I_x} f_X(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà della densità congiunta

- ▶ [Densità marginali] si ottengono integrando rispetto alle variabili rimanenti: la densità marginale di X_i è

$$f_{X_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \underbrace{dx_1, \dots, dx_n}_{\text{tutte tranne } x}$$

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_3 \dots dx_n$$

- ▶ [Densità da funzione di ripartizione]:

$$\boxed{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_{\mathbf{X}}}{\partial x_1 \dots \partial x_n}(\mathbf{x}) \quad \text{q.o.}}$$

Variabili Alatorie Multivariate

BAYES • ESEMPIO. $X, X_1, \dots, X_n \sim U(0, 1)$, $Y = \#\{1 \leq i \leq n : X_i > X\}$;
 (X, Y) sono una coppia con X continua e Y discreta

• ESEMPIO. N n. di sinistri, S danno totale; (N, S) ha
 distribuzione mista MASSA $\sim (0, 0)$

$$\{N=0\} \Rightarrow \{S=0\}$$

• ESEMPIO. $S > 0$ prezzo di un titolo con distribuzione continua,
 X, Y payoff di due opzioni con strike K_1, K_2 su S con stessa
 scadenza; (X, Y) ha distribuzione mista MASSA $\sim (0, 0)$

$$X = \max(S - K_1, 0) \quad Y = \max(S - K_2, 0)$$

$$P(X=0) = P(S < K_1)$$

$$P(X=0, Y=0) = P(S < \min(K_1, K_2))$$

Indipendenza di Variabili Aleatorie

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità
 - ▶ $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ va sono **indipendenti** se sono indipendenti le σ -algebre

$$(\sigma(X_\alpha))_{\alpha \in I}$$

- ▶ per ogni $\alpha \in I$, $\mathcal{X}_\alpha$ è un insieme di va
 $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ sono **indipendenti** se sono indipendenti le σ -algebre

$$(\sigma(X, X \in \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha \in I}$$

le va in ogni $\mathcal{X}_\alpha$ potrebbero non essere indipendenti; in particolare ogni $\mathcal{X}_\alpha$ potrebbe essere un vettore di va

$$(X_\alpha)_{\alpha \in I} \text{ INDIP. } \Leftrightarrow (\underbrace{\sigma(X_\alpha)}_{\{X_\alpha \in B\}})_{\alpha \in I} \text{ INDIP.}$$

PER OGNI $n \geq 2$, PER OGNI $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$
 PER OGNI $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} P(X_{\alpha_1} \in B_1, \dots, X_{\alpha_n} \in B_n) &= \\ &= P(X_{\alpha_1} \in B_1) \cdot \dots \cdot P(X_{\alpha_n} \in B_n) \end{aligned}$$

Indipendenza di Variabili Aleatorie

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$ vettore di va;
le seguenti proprietà sono equivalenti

- 1 $X_1, \dots, X_n$ sono **indipendenti**:

$$\underline{P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdots P(X_n \in B_n)}$$

per ogni $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$

$B_1 = \mathbb{R}$
2 per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$B_i = (-\infty, x_i] \quad F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

Indipendenza di Variabili Aleatorie

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$ vettore di va;
le seguenti proprietà sono equivalenti

- ④ [Caso discreto] per ogni $j_1, \dots, j_n$

$$\underline{p_{j_1, \dots, j_n} = p_{j_1}^{(1)} \cdots p_{j_n}^{(n)}}$$

dove $p_j^{(i)} = P(X_i = x_j^{(i)})$ è la massa di prob. marginale di X_i

- ⑤ [Caso continuo con densità] per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\underline{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- ESERCIZIO. **Esponenziale bivariata**: per $-1 \leq \alpha \leq 1$

$$F_{X,Y}(x,y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})(1 + \alpha e^{-x-y}), \quad x \geq 0, y \geq 0$$

- 1 verificare che si tratta di una cdf bivariata
- 2 verificare che le marginali sono esponenziali standard
- 3 mostrare che X, Y sono indipendenti se e solo se $\alpha = 0$
- 4 trovare la pdf congiunta
- 5 determinare la copula di (X, Y)

$$= 1 - e^{-x}$$
$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = 1 - e^{-x}$$

$$\bar{F}_{X,Y}(x,y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})(1 + \alpha e^{-x-y})$$

$$= C(F_X(x), F_Y(y))?$$

$$= (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})(1 + \alpha(1 - (1 - e^{-x}))(1 - (1 - e^{-y})))$$

$$= F_X(x) \cdot F_Y(y) (1 + \alpha(1 - F_X(x))(1 - F_Y(y)))$$

$$C(u,v) = u \cdot v \cdot (1 + \alpha(1-u)(1-v))$$

Variabili Aleatorie Multivariate

$$X \sim N(\mu, \Sigma)$$

$$(X, X)$$

- **Normale multivariata:** $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$ è normale se per ogni $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\underline{z_1 X_1 + \dots + z_n X_n}$$

è **normale univariata** (una va degenerare è normale di varianza 0)

$$\begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ X_2 + X_4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

- ▶ tutte le marginali (univariate e multivariate) sono normali
- ▶ ogni trasformazione lineare è normale (univariata o multivariata)
- ▶ se non esistono $(z_1, \dots, z_n)$ non tutti nulli tali che $z_1 X_1 + \dots + z_n X_n = 0$ q.c., la pdf di $\mathbf{X}$ è

NON
VICINISMA,
A MENO
CHE
X SIANO
INDIP.

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right\}$$

(con μ vettore e Σ matrice di rango pieno)

- ▶ $\mathbf{X}$ sono indipendenti $\iff \Sigma$ è diagonale