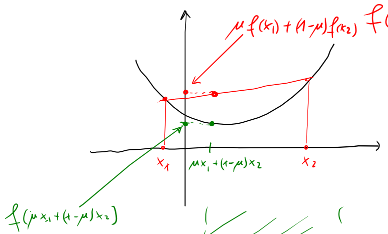
Lezione 38 - 4/12/2025

Funzioni convesse

def. $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo

f si dice convessa su I se $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, $\forall \mu \in [0,1]$

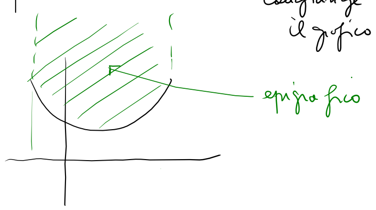
$$f(\mu x_1 + (1-\mu) x_2) \leq \mu f(x_1) + (1-\mu) f(x_2)$$

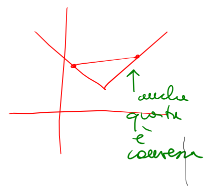


convessa significa

preso 2 pti sul grafico il segmento che li congiunge sta sopra il grafico

es.





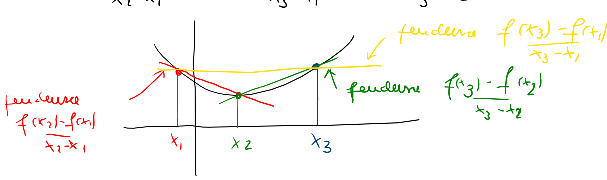
Teorema $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo.

sono equivalenti

1) f è convessa

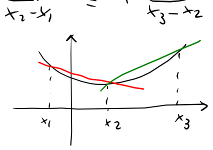
2) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ con $x_1 < x_2 < x_3$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$



3) $\forall x_1, x_2, x_3$ con $x_1 < x_2 < x_3$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$



idea della dim., si fa vedere che 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1)

per esempio come si fa 1) $\Rightarrow$ 2)

1) dice che f è convessa

per provare 2) prendo $x_1 < x_2 < x_3$

esprimo x_2 come $\mu x_1 + (1-\mu) x_3$ con μ opportuno

$$\mu = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

$$1 - \mu = \frac{x_3 - x_1 - (x_3 - x_2)}{x_3 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

$$\boxed{x_2 = \mu x_1 + (1-\mu) x_3}$$

$$\overset{?}{=} \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} \cdot x_1 + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} x_3 = \frac{\cancel{x_3 x_1} - x_2 x_1 + x_2 x_3 - \cancel{x_1 x_3}}{x_3 - x_1} = \frac{x_3 x_2 - x_1 x_2}{x_3 - x_1} = x_2$$

OK

lo

$$f(x_2) = f(\mu x_1 + (1-\mu)x_3)$$
$$\le \mu f(x_1) + (1-\mu) f(x_3) \qquad \mu = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

$$f(x_2) \le \frac{(x_3-x_2)}{x_3-x_1} f(x_1) + \frac{(x_2-x_1)}{x_3-x_1} f(x_3)$$

ottengo $\underbrace{(x_3 - x_1)}_{x_3-x_2+x_2-x_1} f(x_2) \le (x_3-x_2) f(x_1) + (x_2-x_1) f(x_3)$

$$(x_3-x_2) f(x_2) + (x_2-x_1) f(x_2) \le (x_3-x_2) f(x_1) + (x_2-x_1) f(x_3)$$

$$(x_3-x_2)\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \le (x_2-x_1)\big(f(x_3) - f(x_2)\big)$$

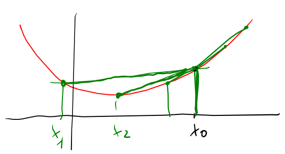
divido per $(x_3-x_2)(x_2-x_1)$

$$\boxed{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}}$$

3)

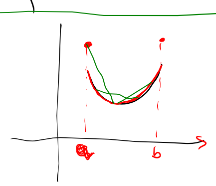
eccetera

Teor. sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo.
Sono equivalenti
1) f è convessa
2) $\forall x_0 \in I$, la funzione $x \longmapsto R^f_{x_0}(x)$ è una funzione crescente.



Corollario sia $f: I \to \mathbb{R}$, I int.
supponiamo che f sia convessa
Allora $\forall x_0 \in \mathring{I}$, esistono finite
derivata destra e la derivata sinistra
$f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ e vale $f'_-(x_0) \le f'_+(x_0)$

corollario f convessa $\Rightarrow$ f continua nei punti di $\mathring{I}$



Teorema $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f sia derivabile

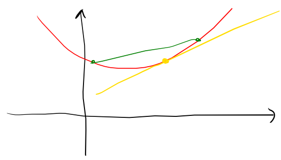
f è convessa $\iff$ f' è crescente $\iff$ $\forall x_0 \in I$, $\forall x \in I$
$$\underbrace{f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{eq. della tangente}}$$

Teorema $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f si derivabile

f è convessa $\iff$ f' è crescente $\iff$ $\forall x_0 \in I$, $\forall x \in I$

$$f(x) \geq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{eq. della tangente}}$$

questo significa "in ogni punto la tangente sta sotto il grafico"



Teor. $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile fino al 2° ordine

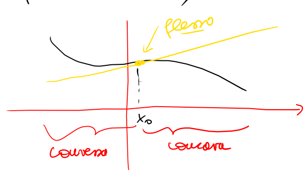
f è convessa $\iff$ $\forall x \in I$, $f''(x) \geq 0$

Def. se $f: I \to \mathbb{R}$ (intervallo) e $x_0 \in I$

f su $I \cap]-\infty, x_0]$ è convessa

$-f$ su $I \cap [x_0, +\infty[$ è convessa (cioè f è concava su $I \cap [x_0, +\infty[$)

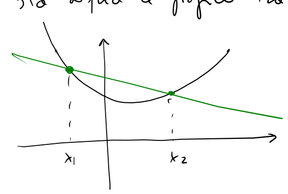
e f è derivabile, x_0 si dice punto di flesso



Def. $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo.

f convessa $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$.

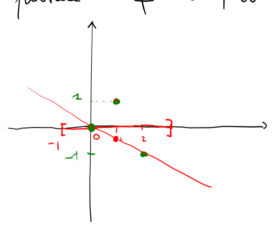
la secante per i pti $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ sta sopra il grafico tra x_1 e x_2 ma sta sotto il grafico prima di x_1 e dopo x_2



Es. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ con $I = [-1, 3]$.

Sia $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$

provare che f non può essere convessa



la secante per $(0,0)$ e $(2,-1)$ ha equazione

$y = -\frac{1}{2}x$ $(s(x))$

la secante in $x = 1$ ha valore $y = -\frac{1}{2}$

$s(1) = -\frac{1}{2}$ non è $\geq 1 = f(1)$

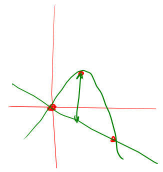
convessa $\iff$ $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ proviamo con $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

$f(1) = -\frac{1}{2}$ non è $\geq 1 = f(4)$

convessa $\iff \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ proviamo con $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

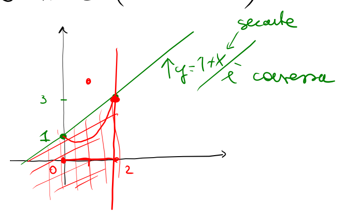
$$1 = \frac{1-0}{1-0} \overset{?}{\le} \frac{-1-1}{2-1} = -2$$

$$1 \overset{?}{\le} -2 \quad \text{no}$$



Es. $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, $f : [0,2] \to \mathbb{R}$
f convessa

si provi che il massimo assoluto per f è in 2 (e vale 3)



è convessa $\Rightarrow$ $f(x)$ sta sotto la retta $y = 1+x$
in 2 vale 3
$\Rightarrow$ 3 è max

Esercizi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\pi - 2\,\text{arctg}\,\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\pi - 2\,\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 2\,\frac{\cancel{x^2}}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}} = 2$$

$$\lim_{n} n^2 \sqrt{\text{tg}\left(\tfrac{1}{n}\right) - \text{sen}\left(\tfrac{1}{n}\right)}$$

calcolo $\lim_{x\to+\infty} x^2 \sqrt{\text{tg}\left(\frac{1}{x}\right) - \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$ $\quad +\infty \cdot 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\text{tg}\left(\frac{1}{x}\right) - \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}}{\frac{1}{x^2}} \qquad \frac{0}{0}$$

$y = \frac{1}{x}$ $\quad \lim_{y\to 0^+} \frac{\sqrt{\text{tg}\, y - \text{sen}\, y}}{y^2}$

$$\lim_{y\to 0^+} \sqrt{\frac{\text{tg}\, y - \text{sen}\, y}{y^4}}$$

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\text{tg}\, y - \text{sen}\, y}{y^4} \qquad \text{tg}\, y = \frac{\text{sen}\, y}{\cos y}$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\text{sen}\, y\left(\frac{1}{\cos y} - 1\right)}{y^4}$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \underset{\downarrow\, 1}{\frac{\text{sen}\, y}{y}} \cdot \underset{\downarrow\, 1}{\frac{1}{\cos y}} \cdot \underset{\downarrow\, \frac{1}{2}}{\frac{(1-\cos y)}{y^2}} \cdot \underset{\downarrow\, +\infty}{\frac{1}{y}} = +\infty$$

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{sen} y}{y^4}$$

$$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{y\to 0^+} \frac{1+\operatorname{tg}^2 y - \cos y}{4y^3}$$

$$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{y\to 0^+} \frac{2\operatorname{tg} y\,(1+\operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{sen} y}{12y^2}$$

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{2\operatorname{tg} y + 2\operatorname{tg} y^3 + \operatorname{sen} y}{12y^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{y\to 0^+} \frac{2 + 2\operatorname{tg}^2 y + 6\operatorname{tg}^2 y\,(1+\operatorname{tg}^2 y) + \cos y}{24y} = +\infty$$

$\to 2$, $\to 0$, $\to 0$, $\to 1$, $\to 3$; $24y \to 0^+$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{sen} y}{y^4}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + R_3(x) \quad \text{con } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_3(x)}{x^3} = 0 \\ \operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{6} + \tilde{R}_3(x) \quad \text{con } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tilde{R}_3(x)}{x^3} = 0 \end{array}}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x = \cancel{x} + \frac{x^3}{3} + R_3(x) - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} - \tilde{R}_3(x) = \frac{x^3}{2} + R_3(x) - \tilde{R}_3(x)$$

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^4} = \frac{x^3/2 + R_3(x) - \tilde{R}_3(x)}{x^4}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{R_3(x)}{x^3} - \frac{\tilde{R}_3(x)}{x^3}\right)}_{\to \frac{1}{2}} = +\infty$$

Scrivere la formula di Taylor con resto di Peano con $x_0 = 0$ e $n = 3$ per le funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$

$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$
$f^{IV}(0) = 0$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + R_3(x) \quad \text{con } \lim_{x\to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0$$

$f(x) = \operatorname{tg} x \qquad f(0) = 0$
$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x \qquad f'(0) = 1$
$f''(x) = 2\operatorname{tg} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x) = 2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} x^3 \qquad f''(0) = 0$
$f'''(x) = 2(1+\operatorname{tg}^2 x) + 6\operatorname{tg}^2 x\,(1+\operatorname{tg}^2 x) \qquad f'''(0) = 2$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2}{3!}x^3 + \tilde{R}_3(x) = x + \frac{x^3}{3} + \tilde{R}_3(x) \quad \text{con } \lim_{x\to 0} \frac{\tilde{R}_3(x)}{x^3} = 0$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

osservazione

prendo $x \in \mathbb{R}$

considero la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

questa serie è convergente per qualunque valore di x (usare il criterio del rapporto nella serie in valore assoluto)

DEFINISCO!

sen x come la somma di questa serie,

Es. $\lim_{x \to 0} \frac{2 \lg(\cos x) + x^2}{x^4}$ $\quad \frac{0}{0}$

$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x \to 0} \frac{2 \frac{1}{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x) + 2x}{4x^3}$

$\lim_{x \to 0} \frac{2x - 2 \operatorname{tg} x}{4x^3}$ $\left(= -\frac{1}{6} \right)$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3} \right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3}$ $\quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + R_3(x)$ con $\lim_{x \to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x + \frac{x^3}{3} + R_3(x)\right)}{x^3}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + R_3(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{3} + \frac{R_3(x)}{x^3} = -\frac{1}{3}$

Studiare $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \operatorname{arctg} x$

dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

segno: $f(x) > 0$ per $x > 0$
$f(x) < 0$ per $x < 0$

(oss: è funzione dispari (la potrei studiare solo su $x>0$))

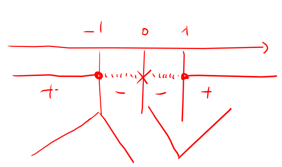
limiti

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pi$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\pi$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2 \frac{1}{1+x^2} = \frac{-1 - x^2 + 2x^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{x^2 - 1}{x^2(x^2+1)}$

$f'(x) > 0$ per $x^2 - 1 > 0$ $\quad x < -1 \cup x > 1$ nel dominio



max per $x = -1$

min per $x = 1$

(calcolare $f''(x)$ e studiare il segno)