

IL SETTECENTO: DAI BERNOULLI A EULER

1713-1783

Le date-simbolo come inizio e fine di questo periodo tematico:

1713: pubblicazione dell'*Ars Conjectandi* di Jacques Bernoulli

1783: morte di Leonhard Euler

In questo periodo si inizia sistematicamente a pubblicare i lavori su riviste, specialmente su *Acta eruditorum*.

Questi sono stati un periodico mensile, pubblicato per un secolo intero, dal 1682 al 1782, in Germania. Furono una delle prime riviste scientifiche di area germanica e il più antico periodico letterario tedesco. Avevano lo scopo di tenere aggiornati sulle ultime scoperte scientifiche e sulle novità librarie di tutta Europa.

Fondato da Otto Mencke e Gottfried Leibniz, il periodico era interamente scritto in latino e conteneva estratti da nuovi scritti, note e recensioni, brevi saggi e trattati, soprattutto sulle scienze naturali e la matematica, ma anche su varie altre discipline quali diritto, storia e teologia.

Vi contribuirono numerosi eminenti scienziati dell'epoca, non solo tedeschi, tra i quali, oltre a Leibniz, Bernoulli, Boyle, Eulero, Laplace e Lalande, ma anche umanisti e filosofi come Christian Thomasius e Christian Wolff.

Negli *Acta* apparvero studi di eccezionale importanza, come quello di Leibniz sui fondamenti del calcolo infinitesimale, e la rivista divenne uno dei principali veicoli della comunicazione del sapere durante l'Illuminismo.

LA FAMIGLIA BERNOULLI

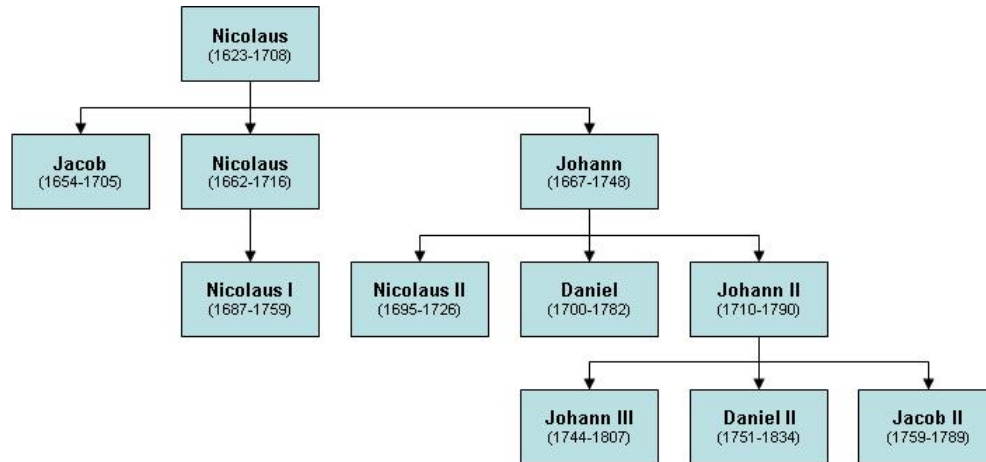
Famiglia originaria di Anversa, trasferitasi poi a Francoforte e quindi a Basilea. Tra la fine del sec. XVII e il principio del XIX, ha dato almeno otto matematici e numerosi scienziati.

Il fondatore della dinastia dei Bernoulli si alleò con una delle più vecchie famiglie di Basilea e diventò un commerciante di successo. Anche Nicola il Vecchio, capostipite, fu un commerciante, come lo erano stati suo nonno e il suo bisnonno; tutti avevano accumulato ingenti fortune.

Il primo che si allontanò dalla tradizione si fece medico; il genio matematico, tuttavia, si manifestò a partire dai figli di Nicolaus Bernoulli.

Vista la ricorrenza dei nomi all'interno della famiglia, alcuni dei personaggi vengono citati con un numero progressivo, come i membri di una dinastia; inoltre, tenuto conto delle origini e di altri aspetti della storia, vengono citati sia con i nomi tedeschi sia con i nomi francesi o inglesi.

I matematici della famiglia sono tra i più entusiasti seguaci di Leibniz.



Jacob (1654-1705)



Johann (1667-1748)



Nicolaus II (1695-1726)



Daniel (1700-1782)



Johann III (1744-1807)



Jacob II (1759-1789)

Jacob Bernoulli (1654-1705) - anche *Jacques* o *James*

Nato a Basilea, viaggia molto per l'Europa. E' influenzato da Wallis e Barrow, ma soprattutto da Leibniz.

- Jacob suggerisce a Leibniz il termine "integrale" e così Leibniz inizia a usarlo.

- Osserva che nei punti di max e di min di una funzione non sempre la derivata prima si annulla (asintoti verticali...)

- Studia le serie infinite.

- Dimostra la *disuguaglianza di Bernoulli*, comunque già scoperta da Barrow...

- Disuguaglianza di Bernoulli: per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall x > -1$$

- Prova che la serie armonica è divergente (ne era a conoscenza già Oresme...)

- Proprio sul nascente *calcolo delle variazioni* i fratelli Jacob e Johann entrano in conflitto... E' nota la

- Equazione differenziale di Bernoulli:

$$y' + f(x)y = g(x)y^n.$$

- Studia problemi alla moda: catenaria, trattrice, isocrona... sperimentando la potenza del calcolo infinitesimale.

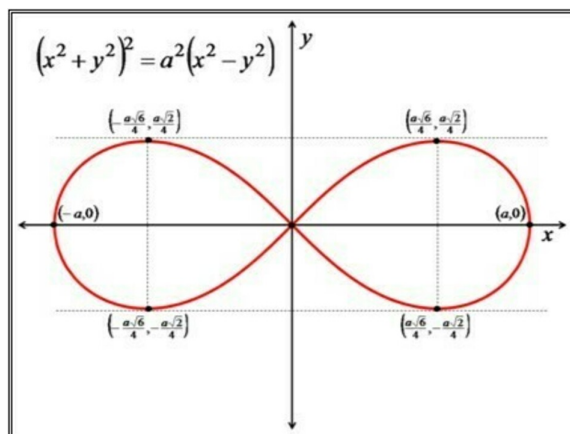
- Le coordinate polari sono state usate da Newton a partire dal 1671, ma Jacob le introduce ufficialmente per risolvere problemi di natura analitica.

- E' affascinato dalle curve piane e una porta il suo nome.

- La *Lemniscata di Bernoulli* è una curva algebrica piana a forma di otto orizzontale: essa è definita dai punti per i quali il prodotto delle distanze da due punti fissati detti fuochi è costante. Denotando tale costante con c^2 , una sua equazione cartesiana risulta

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2).$$

Bernoulli la introdusse (nel **1694**) come variante dell'ellisse, che è il luogo dei punti per i quali la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi è costante. La chiamò *lemniscus*, l'equivalente latino di "fiocco pendente".



In coordinate polari ha equazione

$$r^2 = 2c^2 \cos 2\theta.$$

- Jacob è affascinato soprattutto dalla *spirale logaritmica* (già studiata da Descartes e Torricelli). In coordinate polari ha equazione

$$r = ae^{b\theta} \quad \text{oppure} \quad \theta = \frac{1}{b} \ln(r/a)$$

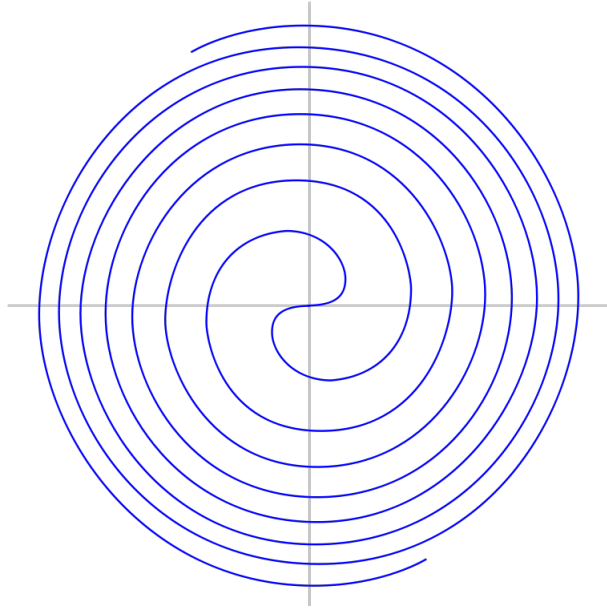
da cui il nome "logaritmica". Affascinato dalle sue molteplici proprietà, Jacob la volle sulla lapide della sua tomba (Basler Münster, un tempo cattedrale cattolica di Basilea).



Il motto che la accompagna, *eadem mutata resurgo* ("risorgo uguale eppure diversa") fa riferimento forse all'ubiquità di tale curva in natura, o forse piuttosto alle proprietà di auto-similarità. Proprietà che, purtroppo, non si evincono dalla spirale scolpita sulla lapide: difatti, l'ignoto autore del monumento, invece di una spirale logaritmica (dove i raggi crescono in progressione geometrica) scolpì una banale spirale archimedeica (dove la progressione dei raggi è aritmetica).

- La *spirale parabolica* o *spirale di Fermat* ha equazione

$$r^2 = a^2 \theta$$



- Pubblica i suoi risultati su *Acta eruditorum*.
- Intrattiene una fitta corrispondenza con altri matematici.
- L'*Ars conjectandi*, pubblicato postumo nel 1713, è la sua opera più famosa; è il primo testo di *Calcolo delle probabilità*. Contiene:
 - la teoria del calcolo combinatorio;
 - una dimostrazione della formula del binomio e il suo uso per il calcolo dell'interesse composto;
 - i *numeri di Bernoulli*: coefficienti in una formula ricorsiva per somme di potenze di interi;
 - il *Teorema di Bernoulli* sulla legge dei grandi numeri: tema di fitta corrispondenza con Leibniz;
 - un'appendice sulle serie infinite.

Johann Bernoulli (1667-1748) - anche *Jean* o *John*

Inizia a studiare chimica (dottorato nel 1690) ma poi passa a interessarsi al calcolo infinitesimale.

Sebbene i fratelli Jacob e Johann avessero lavorato insieme prima che Johann si laureasse all'Università di Basilea (ad esempio, riscoprendo gli sviluppi in serie di $\sin(n\theta)$ e $\cos(n\theta)$, già noti a Viète, estendendoli agli n razionali...) in seguito i due svilupparono una relazione di violenta competizione. Jacob fu geloso della posizione di Johann e i due spesso tentarono di farsi fuori a vicenda.

Nel 1705, alla morte di Jacob, gli succede alla cattedra di matematica a Basilea. E allora la gelosia di Johann si accende nei confronti del proprio figlio, il brillantissimo Daniel Bernoulli, proprio in conseguenza di un premio ricevuto da Daniel.

- A Parigi ha un allievo: Guillaume Francois marchese di **de l'Hôpital** (1661-1704) e gli insegna la nuova matematica di Leibniz. Stipulano un contratto segreto: Bernoulli si impegna a consegnargli tutte le sue scoperte. Ora sappiamo che la *Regola di de l'Hôpital* è stata trovata da Johann nel 1694 e pubblicata da de l'Hôpital in *Analyse des infiniment petits* (1696), dove l'autore ringrazia comunque Johann Bernoulli e Leibniz. Tale relazione influenzerà pesantemente l'analisi del Settecento.

• *Regola di de l'Hôpital*

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni differenziabili nel punto a tali che $f(a) = 0 = g(a)$ e se esiste

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dopo la morte di de l'Hôpital, Johann svela il patto e quindi lo accusa di plagio.

- Johann è estremamente prolifico: scrive ancora più del fratello Jacob:

Manuale di calcolo differenziale (stampato solo nel 1924!)

Manuale di calcolo integrale (pubblicato nel 1742).

- Molti attribuiscono a Johann la nascita del Calcolo delle variazioni, ma studia i primi elementi di *geometria differenziale* e di calcolo esponenziale (non solo $y = a^x$ ma anche $y = x^x \dots$)

- Espone la *Relazione tra funzioni trigonometriche e logaritmi immaginari* (1702), usando le equazioni differenziali:

$$\arctan z = \frac{1}{i} \ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$

- Nasce una polemica con **Brook Taylor** (1685-1731) per la paternità della *serie di Taylor*: se $f(x)$ è una funzione a valori reali, definita in un intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$ e infinite volte derivabile, la serie di potenze

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

scritta più compattamente come

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

è la serie di Taylor di f nel punto x_0 . Troncata al grado n , fornisce il *polinomio di Taylor* che approssima la funzione f in un intorno di x_0 .

In realtà, sia Jean Bernoulli che Brook Taylor erano stati anticipati da **Gregory**!

- I tre figli di Johann sono tutti matematici; il più noto, **Daniel** (contributi importanti alla idrodinamica e alla probabilità) entra in polemica col fratello **Nicolas** intorno al *paradosso di San Pietroburgo*.