

# Istituzione di Matematica - DIA UNITS

## Prova di Esame 2. 2025-26

1. Dato l'insieme universale  $\mathcal{U} = \{n \in \mathbb{Z} : 1 \leq n \leq 20\}$  scegli due sottoinsiemi  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  per dimostrare la Legge di De Morgan -  $\mathcal{A}^c \cup \mathcal{B}^c = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^c$ .
2. Calcola la derivata delle seguenti funzioni;

(a)  $f(x) = e^{3x^2 - 1}$

(b)  $f(x) = \log(\sin^2 x)$

3. Studia la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

In particolare trova il dominio, gli asintoti (se ci sono), l'intersezione con gli assi del piano cartesiano, i punti critici (dove  $f'(x) = 0$ ), la concavità (data dal segno di  $f''(x)$ ) e alla fine fai il disegno della funzione.

4. Calcola i seguenti integrali;

(a)  $\int x e^{2x^2 - 3x} dx$

(b)  $\int_{-1}^2 \frac{1}{x+3} dx$

5. Trova l'area delimitata dalla parabola  $y = -x^2 + 5x - 4$  e la retta  $y = 6x - 6$ . Per aiutarti fai un disegno delle due curve indicando l'area calcolata.
6. Data la superficie quadrica:

$$9x^2 + 9/4y^2 + z^2 = 9,$$

descrivi le forme geometriche ottenute mettendo:

(a)  $x = 0$

(b)  $y = 0$

(c)  $z = 0$

Disegna la forma geometrica della superficie in tre dimensioni tenendo conto dei risultati ottenuti sopra.

7. Dato i due vettori  $\vec{v} = (0, 2, -1)$  e  $\vec{w} = (1, 0, 2)$ :

- (a) trova un vettore ortogonale a tutti e due;
- (b) trova il piano parallelo ai due vettori e passante per il punto  $(1, 2, 1)$ ;
- (c) calcola la distanza da questo piano all'origine  $(0, 0, 0)$ .