

1

Il seguente argomento porta a una contraddizione:

- Vale che: $\frac{d}{dt} \arctan(1/t) = \frac{1}{1+1/t^2} \left(-\frac{1}{t^2}\right) = -\frac{1}{1+t^2}$;
- Prendendo la trasformata di Fourier di entrambi i membri, e usando la proprietà della trasformata della derivata, troviamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \left[\frac{d}{dt} \arctan(1/t) \right] (\omega) &= -i\omega \mathcal{F} [\arctan(1/t)] (\omega) \\ \mathcal{F} \left[\frac{1}{1+t^2} \right] (\omega) &= \pi e^{-|\omega|} \\ \implies \mathcal{F} [\arctan(1/t)] (\omega) &= -i \frac{\pi e^{-|\omega|}}{\omega} ;\end{aligned}$$

- $\arctan(1/t)$ va come $1/t$ per $t \rightarrow \pm\infty$, ed è una funzione limitata per tutti gli altri valori di t , dunque è in $L^2(\mathbb{R})$. Pertanto la sua trasformata di Fourier deve anch'essa essere in $L^2(\mathbb{R})$;
- la funzione $-i \frac{\pi e^{-|\omega|}}{\omega}$ va come $1/\omega$ per $\omega \rightarrow 0$, dunque non è in $L^2(\mathbb{R})$.

Trova l'errore e risolvi l'apparente paradosso. [*Suggerimento:* Guarda come si comporta la funzione $\arctan(1/t)$ vicino a $t = 0$. Riesamina alla luce di questo il calcolo della sua derivata.]

2

Considera il set di vettori $\{e^{(k)}\}_{k \geq 0}$ in $\ell^2 = \{ \{a_n\}_{n \geq 1} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \}$ (lo spazio di Hilbert delle successioni a quadrato sommabile) definito come segue:

- $e^{(0)}$ è la successione definita da $e_n^{(0)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{2}{n+1}, & \text{per } n \geq 1 \text{ dispari} , \\ 0, & \text{per } n \geq 1 \text{ pari} . \end{cases}$
- $e^{(k)}$ per qualsiasi $k \geq 1$ è la successione definita da $e_n^{(k)} = \delta_n^{2k} = \begin{cases} 1, & \text{per } n = 2k, n \geq 1 , \\ 0, & \text{per } n \neq 2k, n \geq 1 . \end{cases}$

Mostra che $\{e^{(k)}\}_{k \geq 0}$ è un set ortonormale. È anche un set completo? [*Suggerimento:* Per mostrare che è ortonormale, ricorda che $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Per controllare se è completo, prova ad esempio a calcolare i coefficienti di Fourier del vettore definito dalla successione $\{a_n\}_{n \geq 1}$ con $a_1 = -1$, $a_3 = 2$ e con tutti gli altri a_n nulli.]