Complex Lie Algebra $D_2 \cong A_1 \oplus A_1$

- Consideriamo l'alg. di Lie $A_1 \oplus A_1$.

- Dynkin diagram è 

- Generatori sono $J_i^L,\ J_j^R$ $\quad i,j = 1,2,3$ con regole di commutazione

$$[J_i^L, J_j^L] = i\epsilon_{ijk} J_k^L$$

$$[J_i^R, J_j^R] = i\epsilon_{ijk} J_k^R$$

$$[J_i^L, J_j^R] = 0$$

- Convenientemente possiamo ridefinire la base dei generatori

$$\begin{aligned} \hat{M}_i &= J_i^L + J_i^R \\ \hat{K}_i &= J_i^L - J_i^R \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} [\hat{M}_i, \hat{M}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{M}_k \\ [\hat{K}_i, \hat{K}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{M}_k \\ [\hat{M}_i, \hat{K}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{K}_k \end{cases}$$

(Vedremo che $\hat{M}_i$ e $\hat{K}_j$ hanno a che fare rispettivamente coi momenti angolari e i generatori dei boost del gruppo di Lorentz.)

• L'algebra di Lie $A_1 \oplus A_1$ è isomorfa a D_2, che è generata da matrici ANTISIMMETRICHE 4x4.

($D_r \cong so(2r)$ $\rightarrow$ alg. di Lie di $SO(2r)$ $\mathbb{1} = (e^{A})^T (e^{A}) = e^{A+A^T} \Rightarrow A^T = -A$)

I suoi generatori sono matrici 4x4 del tipo $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$\uparrow M_{12}$

cioè sono dati da $M_{\mu\nu}$ con elem. di matrice

$$(\hat{M}_{\mu\nu})_{\rho\sigma} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\sigma}$$

Le loro regole di commutazione sono

$$[\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{M}_{\alpha\beta}] = \delta_{\nu\alpha}\hat{M}_{\mu\beta} - \delta_{\mu\alpha}\hat{M}_{\nu\beta} - \delta_{\nu\beta}\hat{M}_{\mu\alpha} + \delta_{\mu\beta}\hat{M}_{\nu\alpha}$$

Dim. $(\hat{M}_{\mu\nu})_{\rho\sigma}(\hat{M}_{\alpha\beta})_{\sigma\lambda} = (\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\sigma})(\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\lambda} - \delta_{\beta\sigma}\delta_{\alpha\lambda}) =$

$$= \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\alpha}\delta_{\beta\lambda} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\beta}\delta_{\alpha\lambda} - \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\alpha}\delta_{\beta\lambda} + \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\beta}\delta_{\alpha\lambda}$$

$$[\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{M}_{\alpha\beta}]_{\rho\lambda} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\alpha}\delta_{\beta\lambda} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\beta}\delta_{\alpha\lambda} - \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\alpha}\delta_{\beta\lambda} + \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\beta}\delta_{\alpha\lambda}$$
$$- \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\mu}\delta_{\nu\lambda} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\nu\beta}\delta_{\mu\lambda} + \delta_{\beta\rho}\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\beta\rho}\delta_{\alpha\nu}\delta_{\mu\lambda}$$

$$= \delta_{\nu\alpha}\big(\underbrace{\delta_{\mu\rho}\delta_{\beta\lambda} - \delta_{\beta\rho}\delta_{\mu\lambda}}_{M_{\mu\beta}}\big) - \delta_{\mu\alpha}\big(\underbrace{\delta_{\nu\rho}\delta_{\beta\lambda} - \delta_{\beta\rho}\delta_{\nu\lambda}}_{M_{\nu\beta}}\big)$$

$$- \delta_{\nu\beta}\big(\underbrace{\delta_{\mu\rho}\delta_{\alpha\lambda} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\mu\lambda}}_{M_{\mu\alpha}}\big) + \delta_{\mu\beta}\big(\underbrace{\delta_{\nu\rho}\delta_{\alpha\lambda} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\nu\lambda}}_{M_{\nu\alpha}}\big) \quad //$$

• Siccome c'è isomorfismo $A_1 \oplus A_1 \cong D_2$, deve esistere una mappa lineare che cambi le basi da $\hat{K}_i, \hat{M}_i$ a $\hat{M}_{\mu\nu}$:

$$\hat{M}_{0i} = i\hat{K}_i \qquad\qquad \hat{K}_i = -i\hat{M}_{0i}$$
$$\hat{M}_{ij} = i\epsilon_{ijk}\hat{M}_k \quad \longleftrightarrow \quad \hat{M}_i = -\frac{i}{2}\epsilon_{ilk}\hat{M}_{lk}$$

Verifichiamo che $\hat{K}_i, \hat{M}_i$ soddisfino relazioni di comm. di $A_1 \oplus A_1$:

$$[\hat{K}_i, \hat{K}_j] = -[\hat{M}_{0i}, \hat{M}_{0j}] = -\cancel{\delta_{i0}\hat{M}_{0j}} + \delta_{00}\hat{M}_{ij} + \cancel{\delta_{ij}}\hat{M}_{00} - \cancel{\delta_{0j}}\hat{M}_{i0}$$
$$= i\epsilon_{ijk}\hat{M}_k$$

$$[\hat{M}_i, \hat{K}_j] = -\frac{1}{2}\epsilon_{ilk}[\hat{M}_{lk}, \hat{M}_{0j}] = -\frac{1}{2}\epsilon_{ilk}(0 - 0 - \delta_{kj}\hat{M}_{l0} + \delta_{lj}\hat{M}_{k0})$$
$$= \epsilon_{ijk}\hat{M}_{0k} = i\epsilon_{ijk}K_k$$

$$[\hat{M}_i, \hat{M}_j] = -\frac{1}{4}\epsilon_{ilk}\epsilon_{jrs}[\hat{M}_{lk}, \hat{M}_{rs}] =$$
$$= -\frac{1}{4}\epsilon_{ilk}\epsilon_{jrs}(\delta_{kr}\hat{M}_{ls} - \delta_{lr}\hat{M}_{ks} - \delta_{ks}\hat{M}_{lr} + \delta_{ls}\hat{M}_{kr})$$
$$= -\epsilon_{ilk}\epsilon_{jrs}(\delta_{kr}\hat{M}_{ls}) = -\epsilon_{ilk}\epsilon_{jks}\hat{M}_{ls} =$$
$$= \epsilon_{ilk}\epsilon_{jsk}\hat{M}_{ls} = (\cancel{\delta_{ij}}\delta_{ls} - \delta_{is}\delta_{lj})\hat{M}_{ls} =$$
$$= \hat{M}_{ij} = i\epsilon_{ijk}\hat{M}_k$$

Forme reali di $A_1 \oplus A_1 \cong D_2$

- Se prendiamo combinazioni reali di $M_{\mu\nu}$, otteniamo una matrice reale antisimm. 4x4 A.
  Esponenziando tale matrice, otteniamo una matrice di $SO(4)$:

$$\left.\begin{aligned} e^A (e^A)^T = (e^A)^T e^A = e^{A+A^T} = e^0 = \mathbb{1} \\ \det e^A = e^{\mathrm{tr} A} = e^0 = 1 \end{aligned}\right\} e^A \in SO(4)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Span}(M_{\mu\nu}) \cong so(4) \subset sl(2,\mathbb{C}) \oplus sl(2,\mathbb{C})$$

In termini di $i\hat{M}_i, i\hat{K}_i$, un elem. dell'alg. reale $so(4)$ è dato da una loro combinazione lineare REALE:

$$A \in so(4): \quad A = i\hat{\alpha}^i \hat{M}_i + i\hat{\beta}^j \hat{K}_j = i(\hat{\alpha}^i + \hat{\beta}^i) J_L^i + i(\hat{\alpha}^j - \hat{\beta}^j) J_R^j$$

$$\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}^i \in \mathbb{R}$$

∘ Facciamo ora un'altra scelta di forma reale, prendendo combinazioni lineari REALI di iM_i e iK_j con $M_i \equiv \hat{M}_i$ e $K_j \equiv i\hat{K}_j$:

$$B = i\alpha^i M_i + i\beta^j K_j = i(\alpha^i \hat{M}_i + i\beta^j \hat{K}_j) = i\left[(\alpha^i + i\beta^i) J_L^i + (\alpha^i - i\beta^i) J_R^i\right]$$

Le regole di comm. di M_i, K_i sono
$$\begin{cases} [M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk} M_k \\ [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} M_k \\ [M_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \end{cases}$$

$$(\hat{M}_{\mu\nu})_{\rho\sigma} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\sigma}$$

$$B = \frac{\alpha^i}{2}\epsilon_{ilk} M_{lk} + \beta^j M_{0j} \equiv -\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$$
$$= -i\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}$$

In particolare ora possiamo definire la base

$$M_{0i} = iK_i \qquad \longleftrightarrow \qquad K_i = -iM_{0i}$$
$$M_{ij} = i\epsilon_{ijk} M_k \qquad \qquad M_i = -\frac{i}{2}\epsilon_{ilk} M_{lk}$$

A volte nei testi di fisica si usa def. dei $M_{\mu\nu}$ senza i.

con

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = (\eta_{\mu\alpha} M_{\nu\beta} - \eta_{\nu\alpha} M_{\mu\beta} - \eta_{\mu\beta} M_{\nu\alpha} + \eta_{\nu\beta} M_{\mu\alpha})$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{con } (M_{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = \delta_\nu^\rho \eta_{\mu\sigma} - \delta_\mu^\rho \eta_{\nu\sigma} \quad (*)$$

$$(M_{01})^\rho{}_\sigma = -(\delta_0^\rho \eta_{1\sigma} - \delta_1^\rho \eta_{0\sigma})$$
$$- \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(*) Se prendiamo matrici antisimm. $\hat{M}_{\mu\nu}$ e nella stessa base scriviamo le matrici $M_{\mu\nu}$, non otteniamo matrici reali; ma con cambiam. di base si trovano ok.

↓

È come cambiare base in modo che $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ vada in $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(M_{\mu\nu})^\rho{}_\sigma (M_{\alpha\beta})^\sigma{}_\lambda = (\delta_\nu^\rho \eta_{\mu\sigma} - \delta_\mu^\rho \eta_{\nu\sigma})(\delta_\beta^\sigma \eta_{\alpha\lambda} - \delta_\alpha^\sigma \eta_{\beta\lambda}) =$$
$$= \delta_\nu^\rho \eta_{\mu\beta}\eta_{\alpha\lambda} - \delta_\nu^\rho \eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\lambda} - \delta_\mu^\rho \eta_{\nu\beta}\eta_{\alpha\lambda} + \delta_\mu^\rho \eta_{\nu\alpha}\eta_{\beta\lambda}$$
$$[\,,\,]^\rho{}_\lambda = \delta_\nu^\rho \eta_{\mu\beta}\eta_{\alpha\lambda} - \delta_\beta^\rho \eta_{\alpha\nu}\eta_{\mu\lambda} \quad \to \text{segno corretto}$$
$$-\eta_{\mu\beta}(M_{\nu\alpha})^\rho{}_\lambda = -\eta_{\mu\beta}(\delta_\alpha^\rho \eta_{\nu\lambda} - \delta_\nu^\rho \eta_{\alpha\lambda})$$

Sappiamo che è possib. in pto pk sono matrici di Pauli.
(Il cambiam. di base sarà con entries immaginarie ma continua. $\eta \Leftrightarrow \delta$.)

Esponenziando le matrici $\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}$ otteniamo il gruppo $SO(1,3)$ di matrici Λ (a $\det = 1$) t.c.

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad \rightsquigarrow \quad \Lambda^\alpha{}_\mu \, \eta_{\alpha\beta} \, \Lambda^\beta{}_\nu = \eta_{\mu\nu}$$

Infatti, se $\Lambda = e^A$

$$\eta = e^{tA^T} \eta \, e^{tA}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \hookrightarrow \quad 0 = A^T \eta + \eta A \qquad A^T = -\eta A \eta^{-1} \rightsquigarrow 6 \text{ indipendenti}$$

Inoltre: $\eta_{\alpha\rho} (M_{\mu\nu})^\rho{}_\sigma \, \eta^{\sigma\beta} = \eta_{\alpha\rho} (\delta_\nu^\rho \eta_{\mu\sigma} - \delta_\mu^\rho \eta_{\nu\sigma}) \eta^{\sigma\beta} =$

$$= \eta_{\alpha\nu} \delta_\mu^\beta - \eta_{\alpha\mu} \delta_\nu^\beta = -(M_{\mu\nu})^\beta{}_\alpha$$

$\rightarrow$ $M_{\mu\nu}$ sono 6 matrici indip. che soddisfano $A^T = -\eta A \eta^{-1}$

$\Rightarrow$ generano algebra di Lie di $SO(1,3)$.

$\Longrightarrow$ $M_{\mu\nu}$ generano una forma reale di D_2, che esponenziata dà il gruppo $SO(\underbrace{1,3}_{})$

notazione significa che segnatura di η è $+---$.

GRUPPO di LORENTZ

Il gruppo di Lorentz è il gruppo di trasformazioni $x^\mu \mapsto x'^\mu$ che lascia invariante l'intervallo relativistico ($x^\mu \in \mathbb{R}$)

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \qquad \text{con} \quad \eta_{00} = 1, \; \eta_{0i} = \eta_{i0} = 0, \; \eta_{ij} = -\delta_{ij}$$

$$\rightsquigarrow \quad x' = \Lambda x \quad (x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu) \quad \text{t.c.}$$

$$x'^\mu \eta_{\mu\nu} x'^\nu = x^\rho \Lambda^\mu{}_\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma \overset{!}{=} x^\rho \eta_{\rho\sigma} x^\sigma$$

$$\iff \Lambda^\mu{}_\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \quad \text{ovvero} \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

$$\iff \Lambda \in O(1,3)$$

- $$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \begin{cases} (\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1 \\ \Lambda^\mu{}_0 \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_0 = \eta_{00} = 1 \Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + (\Lambda^i{}_0 \Lambda^i{}_0)^2 \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow \circ\ \Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \circ\ \Lambda^0{}_0 \leq -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Il gruppo di Lorentz ha 4 COMPONENTI connesse (a seconda del segno di $\det \Lambda$ e $\Lambda^0{}_0$; in quanto def. continue non possono cambiare il segno).

- La componente connessa all'identità ($\det\Lambda = 1$, $\Lambda^0{}_0 \geq 1$) è chiamata gruppo delle trasf. di Lorentz proprie $SO(1,3)^{\uparrow}$. Esso forma un sottogruppo di $O(1,3)$.

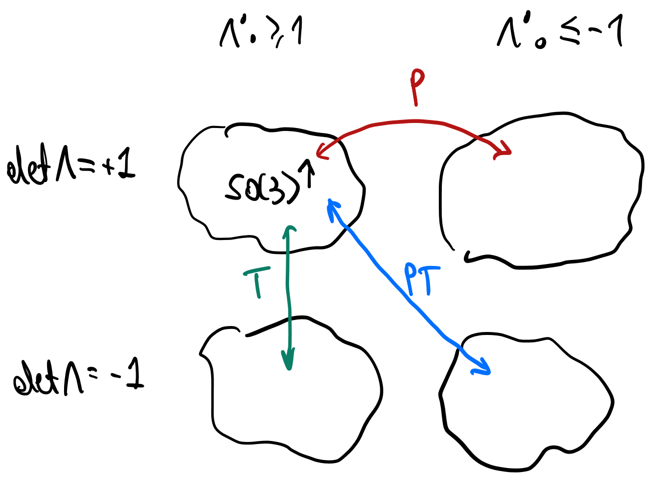
- Le trasf. di Lorentz proprie sono gli raggiunte dalla mappa esponenz.

- Le altri componenti sono raggiunte da $SO(1,3)^{\uparrow}$ con una trasf. di $O(1,3)$. In particolare possiamo considerare

P : Parity $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \in O(1,3)$ componente $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ e $\det\Lambda = -1$

T : Time reversal $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in O(1,3)$ componente $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ e $\det\Lambda = -1$

PT : $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \in O(1,3)$ componente $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ $\det\Lambda = +1$



P, T, PT sono isomorfismi fra le componenti connesse.

Grazie all'alg. di Lie e alla mappa exp (e P, T, PT) possiamo raggiungere tutto il gruppo di Lorentz.

RAPPRESENTAZIONI

- Prendiamo alg. di Lie COMPLESSA $A_1^L \oplus A_1^R \cong sl(2,\mathbb{C})_L \times sl(2,\mathbb{C})_R$
  con generatori J_i^L, J_j^R $i,j = 1,2,3$.

- Le sue rep. sono date da $R = R_1^L \otimes R_2^L$ (rep. di somma diretta di alg.)
  con $\rho_R(J_i^L) = \rho_{R_1^L}(J_i^L) \otimes \mathbb{1}_{R_2^R}$ e $\rho_R(J_j^R) = \mathbb{1}_{R_1^L} \otimes \rho_{R_2^L}(J_j^R)$.

- Le irrep. di $A_1 \cong sl(2,\mathbb{C})$ sono labellate dallo spin $j \in \mathbb{N}/2$
  $\rightarrow R = R_1^L \otimes R_2^R$ è indicata di solito dai due j di R_1^L e R_2^R

  $R = (j_L, j_R)$ con $\dim R = (2j_L+1)(2j_R+1)$

- Ognuna di queste rep. fornisce una rep. anche per le forme reali di D_2 e per i corrispondenti gruppi di Lie reali SEMPLICEM. CONNESSI, come $SU(2) \times SU(2)$ e $Spin(1,3)$.

- Le rep. di dim. inferiori che vedremo fra poco sono

$(0,0)$ singoletto

$\left.\begin{matrix}(1/2,0)\\(0,1/2)\end{matrix}\right\}$ rep. spinoriali

$(1/2,1/2)$ rep. vettoriale

RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&+1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&\\&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i&0\\0&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$$

prendo rap. coniugata 2^c che è equiv a 2:

$$\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)=\underline{2}_L\otimes\underline{2}^c_R=\langle e_1\otimes\hat{e}_1,\ e_1\otimes\hat{e}_2,\ e_2\otimes\hat{e}_1,\ e_2\otimes\hat{e}_2\rangle$$

In qta rappresentazione i generatori di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_L\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_R$ sono

$$iJ_i^L=i\frac{\sigma^i}{2}\otimes\mathbb{1}_2\qquad iJ_i^R=-\mathbb{1}_2\otimes i\frac{\sigma^{i*}}{2}$$

$$-\sigma^{i*}=\varepsilon^{-1}\sigma^i\varepsilon$$

$$\varepsilon=i\sigma_2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$-\sigma^{iT}=-\sigma^{i*}$$

Vediamo come agisca un elemento $\exp(iz^iJ_i^L+iw^jJ_j^R)\in SL(2,\mathbb{C})_L\times SL(2,\mathbb{C})_R$ su un vettore $v\in V_{2_L\otimes 2_R}$:

$$z_i,w_j\in\mathbb{C}$$

$$Ae_a=a_{ca}e_c$$

$$Av=A\,v_ae_a=v_a\,Ae_a=v_a\,a_{ca}e_c=(a_{ca}v_a)e_c$$

$$e^{i\left(z_i\frac{\sigma_i}{2}\otimes 1-w_j1\otimes\frac{\sigma_j^*}{2}\right)}V_{ab}\,e_a\otimes\hat{e}_b=$$

$$=\left(e^{iz_i\frac{\sigma_i}{2}}\otimes\mathbb{1}\right)\left(\mathbb{1}\otimes e^{-iw_j\frac{\sigma_j^*}{2}}\right)V_{ab}\,e_a\otimes\hat{e}_b$$

$$=(g_L\otimes\mathbb{1})(\mathbb{1}\otimes\tilde{g}_R)V_{ab}\,e_a\otimes\hat{e}_b=V_{ab}\,(g_Le_a)\otimes(\tilde{g}_R\hat{e}_b)=$$

$$=V_{ab}\,(g_L)_{ca}(\tilde{g}_R)_{db}\,e_c\otimes\hat{e}_d=(g_L)_{ca}V_{ab}(\tilde{g}_R^T)_{bd}\,e_c\otimes\hat{e}_d$$

Cioè $V_{ab}\mapsto g^L_{ac}V_{cd}\tilde{g}^R_{bd}$, ovvero l'azione sulla matrice 2x2 V è

$$V\mapsto g_L\cdot V\cdot\tilde{g}_R^t\qquad(*)$$

dove $g_L=e^{iz_i\sigma_i/2}$ $\qquad\tilde{g}_R=e^{-iw_j\sigma_j^*/2}$ $\qquad\tilde{g}_R^T=e^{-iw_j\sigma_j/2}$

sto considerando $2^c_R\ (\simeq 2_R)$

Definiamo $g_R\equiv\varepsilon\,\tilde{g}_R\,\varepsilon^{-1}=e^{iw_j\sigma_j/2}$

Una matrice 2×2 V_{ab} può essere espressa come comb. lin. di $\sigma_\mu = (\mathbb{1}, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$ $\rightsquigarrow$ $V = \sum_\mu V^\mu \sigma_\mu$ $\quad V^\mu \in \mathbb{C}$

(*) lascia invariato det di V, poiché g^L e g^R sono matrici di $SL(2)$

$$\det(V^\mu \sigma_\mu) = \det \begin{pmatrix} V^0+V^3 & V^1+iV^2 \\ V^1-iV^2 & V^0-V^3 \end{pmatrix} = (V^0)^2 - (V^3)^2 - (V^1)^2 - (V^2)^2 = $$
$$= V^\mu \eta_{\mu\nu} V^\nu$$

Imponiamo una condizione di realtà su V^μ:

$V^0 = u^0$ e $V^i = -i u^i$ con $u^0, u^i \in \mathbb{R}$

- $V = u^0 \mathbb{1} + i u^i \sigma^i$ e $\det V = (u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2$
$\overset{!}{=} \|u\|^2 = u^\mu \delta_{\mu\nu} u^\nu$ (norma euclidea)

- Il sottogruppo che preserva la condizione di realtà è dato da g_L e g_R con $z_i = a_i \in \mathbb{R}$ e $w_j = b_j \in \mathbb{R}$
cioè $SU(2)_L \times SU(2)_R \subset SL(2,\mathbb{C})_L \times SL(2,\mathbb{C})_R$

$(w_1 \cdot \sigma)(w_2 \cdot \sigma) =$
$= (w_1 \cdot w_2)\mathbb{1} + i(w_1 \times w_2)\cdot\sigma$

<u>Dim.</u> $e^{i a\cdot\sigma/2} (u^0 \mathbb{1} + i u\cdot\sigma) e^{-i b\cdot\sigma/2} =$

$$= \underbrace{\left(\cos\frac{|a|}{2}\mathbb{1} + i\frac{a\cdot\sigma}{|a|}\sin\frac{|a|}{2}\right)\left(u^0\mathbb{1} + iu\cdot\sigma\right)}\left(\cos\frac{|b|}{2}\mathbb{1} - i\frac{b\cdot\sigma}{|b|}\sin\frac{|b|}{2}\right)$$

$$u^0 \cos\frac{|a|}{2}\mathbb{1} - \frac{\sin|a|/2}{|a|}\left((a\cdot u)\mathbb{1} + i(a\times u)\cdot\sigma\right) + i\cos\frac{|a|}{2} u\cdot\sigma + i\frac{u^0}{|a|}\sin\frac{|a|}{2} a\cdot\sigma$$
$$\equiv A\mathbb{1} + iB\cdot\sigma$$

$$= (A\mathbb{1} + iB\cdot\sigma)\left(\cos\frac{|b|}{2}\mathbb{1} - i\frac{b\cdot\sigma}{|b|}\sin\frac{|b|}{2}\right) = C\mathbb{1} + iD\cdot\sigma \quad C, D^i \in \mathbb{R}$$

cioè il gruppo $SU(2)_L \times SU(2)_R$ preserva la condiz. di realtà. //

Tale sottogruppo PRESERVA la NORMA EUCLIDEA.

$\mathbb{Z}_2: (g_L, \tilde{g}_R) \to (-g_L, -\tilde{g}_R)$ lascia invariata la trasf. su v^μ

$$\Rightarrow \quad SO(4) \cong \left(SU(2)_L \times SU(2)_R\right)/\mathbb{Z}_2 \qquad \leftarrow \text{Gruppo compatto.}$$

$SU(2)_L \times SU(2)_R$ è chiamato anche $Spin(4)$.

Imponiamo un'altra condizione di realtà: $V^\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow V$ hermitiana

Vediamo che sottogruppo di $SL(2,\mathbb{C})_L \times SL(2,\mathbb{C})_R$ preserva qta cond.,
cioè per quali valori di z, w il trasf. di V sia ancora hermitiana:

$$V = V^\mu \sigma_\mu \longmapsto g_L V^\mu \sigma_\mu \tilde{g}_R^T = V'$$

$(\sigma_j^*)^t = \sigma_j^\dagger = \sigma_j$

V' è ancora hermitiana quando $\tilde{g}_R^T = g_L^\dagger$ ovvero $e^{-i w_j \sigma^j/2} = e^{-i \bar{z}^j \sigma^j/2}$

$$\Rightarrow \quad w_j = \bar{z}_j \qquad \leftarrow \text{Identifica i due gruppi } SL(2,\mathbb{C})_{L,R}$$

- Questa forma reale manda quadrivett. V^μ in quadriv. V'^μ preservando il prodotto scalare: $V' = \Lambda V$ con $\Lambda \in SO(1,3)$
  Λ t.c. $g_L = \rho_{2_L}(\Lambda)$

centro di $SL(2,\mathbb{C})$

Vediamo inoltre che $SO(1,3) \cong SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \quad (\mathbb{Z}_2 : g \mapsto -g)$

Stessa relaz. che c'è tra $SO(3)$ e $SU(2)$.

$g_L = e^{i z_i \sigma^i/2}$, $z^i = \alpha^i + i\beta^i$

ricoprimento di $SO(1,3)$

Aside: Ricoprimento e rappresentazioni

- Centro $Z(SL(2,\mathbb{C})) = \{ \mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2 \}$

- Gli elem. di $SO(1,3) \cong SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ sono classi di equiv. di elem. di $SL(2,\mathbb{C})$ con $g \sim g'$ se $g' = g \cdot z$ $z \in Z$
Cioè $[g] = \{ g, -g \}$ con $g \in SL(2,\mathbb{C})$.

- La rap. $\underline{2}_{LH}$ di $SL(2,\mathbb{C})$ non è una buona rap. per $SO(1,3)$ (centro agisce in maniera non triv. su $V_{\underline{2}_{LH}}$):
$$\tilde{\rho}_{\underline{2}} : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow V_{\underline{2}}$$
non discende ad una buona mappa sul quoziente: c'è ambiguità nell'assegnare a $[g]$ una matrice agente su $V_{\underline{2}}$, poichè g e $-g$ sono equiv. in $SO(1,3)$.
Posso fare una scelta:
$$\rho_{\underline{2}} : SO(1,3) \longrightarrow V_{\underline{2}}$$
$$[g] \longmapsto g$$
Ma poi ci sono terzetti di elementi g_1, g_2, g_3 con $g_3 = -g_1 g_2$ e allora
$$\rho([g_1])\,\rho([g_2]) = g_1 g_2 = -g_3 = -\rho([g_3]) = -\rho([g_1 g_2])$$
$\rightarrow$ ρ NON è una rap. (fedele)

La rap. in questo caso si dice PROIETTIVA $\tilde{\rho}(s_1)\tilde{\rho}(s_2) = \underbrace{\omega(s_1,s_2)}_{\text{fase}}\tilde{\rho}(s_1 s_2)$

$\rightarrow$ OK in MQ dove interessa azione su raggi-vettore.

- Lo UNIVERSAL COVER dell'algebra reale $su(2)_L \oplus su(2)_R \cong so(4)$ è
  $Spin(4) \cong SU(2)_L \times SU(2)_R$.
  Il suo centro è $Z(Spin(4)) = \mathbb{Z}_2^L \times \mathbb{Z}_2^R$

- Z ha quattro sottogruppi non-triviali $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2^L$, $\mathbb{Z}_2^R$, $\mathbb{Z}_2^D$
  con $\mathbb{Z}_2^D$ uno $\mathbb{Z}_2$ che agisce contemporaneam. su $SU(2)_L$ e $SU(2)_R$
  $\mathbb{Z}_2^D$ è generato da $(-\mathbb{1}, -\mathbb{1}) \in SU(2)_L \times SU(2)_R$

- $SO(4) = Spin(4)/\mathbb{Z}_2^D$.
  Le rep. di $SO(4)$ sono quelle di $Spin(4)$ dove $\mathbb{Z}_2^D$ agisce in maniera triviale. Solo così $\rho(g)$ e $\rho(gz)$ $(z \in \mathbb{Z}_2^D, g \in Spin(4))$ agiscono allo stesso modo, come dovrebbero fare due elementi equiv.

$\Rightarrow$ Rep di $SO(4)$: $(0,0)$, $(1/2, 1/2)$, $(1,0)$, $(0,1)$, ...

$(1/2,1/2)$: $2 \otimes 2$, $(-\mathbb{1},-\mathbb{1})$ agisce come $(-\mathbb{1}) \otimes (-\mathbb{1}) = \mathbb{1}$

$(1,0)$: $3 \otimes 1$, $\mathbb{1} \otimes 1 = \mathbb{1}$

- $SO(3) \times SO(3) = Spin(4)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
  Rep. sono $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ ...

Verifichiamo che

$$g_L v g_L^\dagger = \Lambda v \quad \text{con} \quad \begin{cases} g_L = \exp\left(i(\alpha^i + i\beta^i)\sigma^i/2 \right) \\ \Lambda = \exp\left(i(\alpha^i M_i + \beta^i k_i) \right) = \\ \quad = \exp\left(\frac{\alpha^i}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk} + \beta^i M_{0i} \right) \end{cases}$$

$$v = v^0 \mathbb{1} - \bar{v}\cdot\bar{\sigma} = v^\mu \sigma_\mu$$

- Prendiamo $\vec{\alpha} = (0,0,\alpha)$ e $\vec{\beta} = 0$:

$$g_L = e^{i\alpha\sigma^3/2} = \mathbb{1}\cos\alpha/2 + i\sigma^3 \operatorname{sen}\alpha/2 = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & \\ & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}$$

$$g_L v g_L^\dagger = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 - v^3 & -v^1 + iv^2 \\ -v^1 - iv^2 & v^0 + v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v^0 - v^3 & e^{i\alpha}(-v^1 + iv^2) \\ e^{-i\alpha}(-v^1 - iv^2) & v^0 + v^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v^0 - v^3 & (-\cos\alpha\, v^1 - \operatorname{sen}\alpha\, v^2) + i(-\operatorname{sen}\alpha\, v^1 + \cos\alpha\, v^2) \\ (-\cos\alpha\, v^1 - \operatorname{sen}\alpha\, v^2) - i(-\operatorname{sen}\alpha\, v^1 + \cos\alpha\, v^2) & v^0 + v^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

$$(M_{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = \delta_\nu^\rho \eta_{\mu\sigma} - \delta_\mu^\rho \eta_{\nu\sigma} \Rightarrow (M_{12})^\rho{}_\sigma = \delta_1^\rho \delta_\sigma^2 - \delta_2^\rho \delta_\sigma^1$$

D'altro canto,

$$\Lambda = \exp(\alpha M_{12}) = \exp \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\rightarrow$ rotazione (attorno asse z)

• Prendiamo ora $\vec{\alpha}=0$ e $\vec{\beta}=(0,0,\beta)$

$$g_L = e^{-\beta\sigma^3/2} = \begin{pmatrix} e^{-\beta/2} & \\ & e^{+\beta/2} \end{pmatrix}$$

$$g_L V g_L^\dagger = \begin{pmatrix} e^{-\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{\beta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^0 - V^3 & -V^1 + iV^2 \\ -V^1 - iV^2 & V^0 + V^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{\beta/2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-\beta}(V^0 - V^3) & -V^1 + iV^2 \\ -V^1 - iV^2 & e^{\beta}(V^0 + V^3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cosh\beta\, V^0 + \operatorname{senh}\beta\, V^3) - (\operatorname{senh}\beta\, V^0 + \cosh\beta\, V^3) & -V^1 + iV^2 \\ -V^1 - iV^2 & (\cosh\beta\, V^0 + \operatorname{senh}\beta\, V^3) + (\operatorname{senh}\beta\, V^0 + \cosh\beta\, V^3) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad V' = \begin{pmatrix} \cosh\beta & 0 & 0 & \operatorname{senh}\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{senh}\beta & 0 & 0 & \cosh\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix}$$

$(M_{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = \delta_\nu^\rho \eta_{\mu\sigma} - \delta_\mu^\rho \eta_{\nu\sigma} \quad \Rightarrow (M_{03})^\rho{}_\sigma = \delta_3^\rho \delta_\sigma^0 + \delta_0^\rho \delta_\sigma^3$

D'altro canto,

$$\Lambda = \exp(\beta M_{03}) = \exp \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\beta & 0 & 0 & \operatorname{senh}\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\beta & 0 & 0 & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

→ Boost (lungo direz. z) Per esempio se parto da $p = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e applico boost, ottengo $\begin{pmatrix} m\cosh\beta \\ 0 \\ 0 \\ m\operatorname{senh}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$ con $E^2 - p^2 = m^2$

$$\cosh\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \operatorname{senh}\beta = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \cosh^2\beta - \operatorname{senh}^2\beta = 1$$

• Questa corrispondenza vale per ogni scelta di $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$!

(Cioè la rep. $(1/2, 1/2)$ è la rep. vettoriale di $SO(1,3)$.)

Rappresentazioni spinoriali

Chiamiamo rappresentazioni SPINORIALI le rap 2dim.

$(\frac{1}{2},0) = \underline{2}_L \otimes \underline{1}$ e $(0,\frac{1}{2}) = \underline{1} \otimes \underline{2}_R$.

- Sono rappresentazioni del gruppo $\underbrace{SU(2)_L \times SU(2)_R}_{Spin(4)}$ o $\underbrace{SL(2,\mathbb{C})}_{Spin(1,3)}$ ma non rispettivam. di $SO(4)$ e $SO(1,3)$.

  Infatti i vettori in qte rep. trasformano in maniera non-triviale rispetto allo $\mathbb{Z}_2$ presente in

  $$SO(4) = Spin(4)/\mathbb{Z}_2 \quad \text{e} \quad SO(1,3) = SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$$

  Le rep. $(\frac{1}{2},0)$ e $(0,\frac{1}{2})$ sono rep. PROIETTIVE di $SO(4)$ e $SO(1,3)$ ma non fedeli, cioè sono fedeli a meno di una fase (il che è ok nello sp. di Hilbert che descrive gli stati in MQ).

- Le rep. $(\frac{1}{2},0)$ e $(0,\frac{1}{2})$ sono reali in $SO(4)$ mentre sono una la rap. coniugata dell'altra in $SO(1,3)$.

$$\left.\begin{array}{ll} (\frac{1}{2},0): & g_L \otimes 1 = g_L \\ (0,\frac{1}{2}): & 1 \otimes \tilde{g}_R = \tilde{g}_R \end{array}\right\} \text{matrici } 2\times 2 \qquad \begin{array}{l} g_L = e^{i z_i \sigma^i/2} \\ \tilde{g}_R = e^{-i w_j \sigma^{j*}/2} \end{array}$$

Passiamo alle forme reali:

$SU(2)\times SU(2) \rightarrow z_i, w_j \in \mathbb{R}$ $\quad g_L \sim g_L^*$ e $\tilde{g}_R \sim \tilde{g}_R^*$ con camb. base

$SL(2,\mathbb{C}) \rightarrow \bar{w}_j = z_j$: $\quad \tilde{g}_R = g_L^*$

$$g_L = e^{i(\alpha_i + i\beta_i)\frac{\sigma_i}{2}} \qquad \tilde{g}_R = e^{-i(\alpha_i - i\beta_i)\frac{\sigma_i^*}{2}} \sim e^{i(\alpha_i - i\beta_i)\frac{\sigma_i}{2}} = g_R$$

Notiamo che se consideriamo $SL(2,\mathbb{C})$ come generato dall'alg. complesse $sl(2,\mathbb{C})$, non si può def. R^*. Però se intendiamo $SL(2,\mathbb{C})$ come gruppo 6dim. reale, cioè generato dell'algebra di Lorentz, allora possiamo def. R^*.
A livello di varietà diff.: la rep ρ_{R^*} non preserva la struttura complessa di $SL(2,\mathbb{C})$ visto come varietà complex 3d.

Siccome a noi interessa $SL(2,\mathbb{C}) \cong SO(1,3)$ cioè inteso come varietà reale 6d, allora esso ha due rep. 2 dim: $2 \otimes 1$ e $1 \otimes 2$.

Algebra di Clifford delle matrici gamma

L'algebra di Clifford è composta da D matrici che soddisfano le seguenti relazioni di ANTI-commutazione:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1} \qquad \mu,\nu = 0,1,\dots,D-1 \qquad (0)$$

dove $\eta^{\mu\nu}$ è una metrica su uno spazio D-dimensionale. Qui prenderemo η la metrica di Minkowski con segnatura $(+,-,-,\dots,-)$.

In un certo senso stiamo facendo una generalizzazione delle matrici di Pauli $\{\sigma^i,\sigma^j\} = 2\delta^{ij}\mathbb{1}$, con metrica δ^{ij} in $D=3$.
Così come le matrici di Pauli servono per descrivere gli spinori in $D=3$, così le matrici γ descriveremo gli spinori in D generica. Noi siamo interessati a $D=4$.

- Quando D è pari, possiamo definire una matrice γ_* indip. dalle γ^μ t.c. anticommuti con tutte le γ^μ e quadri all'identità. Essa è data

$$\gamma_* = i^{\frac{D}{2}-1}\gamma^0 \dots \gamma^{D-1} \qquad \text{t.c. } \{\gamma_*, \gamma^\mu\} = 0 \quad \text{e} \quad (\gamma_*)^2 = \mathbb{1}$$

Essendo $\gamma_*^2 = \mathbb{1}$, i suoi autovalori sono ± 1 e i relativi autospazi hanno la stessa dimensione.

Dim. Se $\gamma_* v = +v \Rightarrow \gamma_*(\gamma^\mu v) = -\gamma^\mu \gamma_* v = -(\gamma^\mu v)$.
Inoltre γ^μ è invert. perché $(\det \gamma^\mu)^2 = \det(\gamma^\mu)^2 = 2\eta^{\mu\mu} \det \mathbb{1} \neq 0$.
$\Rightarrow \gamma^\mu$ è isomorf. fra autosp. rel. a $+1$ e autosp. rel. a -1.

- In $D=2$ $(\mu,\nu = 0,1)$ questa è soddisfatta da

$$\gamma^0 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \gamma^1 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma = \gamma^0\gamma^1 = -\sigma^3$$

- Vale la seguente relazione:

se γ^μ soddisfano (o) in D dim. $\Rightarrow$ $\hat{\gamma}^{\hat{\mu}}$, $\hat{\mu} \in \{0,1,\dots,D+1\}$ soddisfano (o) in D+2

con
$$\hat{\gamma}^\mu = \gamma^\mu \otimes \sigma_1 \qquad \mu = 0,1,\dots,D-1$$
$$\hat{\gamma}^D = \mathbb{1} \otimes i\sigma_2$$
$$\hat{\gamma}^{D+1} = \mathbb{1} \otimes i\sigma_3$$

Dim. $\{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\} = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \otimes \sigma_1^2 = 2\eta^{\mu\nu}\, \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} = 2\eta^{\mu\nu}\, \mathbb{1}$

$\{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^D\} = \{\gamma^\mu, \gamma^{D+1}\} \otimes i\,\mathbb{1} = 0$

$\{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^{D+1}\} = \gamma^\mu \otimes i\{\sigma_1, \sigma_2\} = 0$

$\{\hat{\gamma}^D, \hat{\gamma}^D\} = -2\mathbb{1} = \{\hat{\gamma}^{D+1}, \hat{\gamma}^{D+1}\}$

$\{\hat{\gamma}^D, \hat{\gamma}^{D+1}\} = -\gamma^{D+1} \otimes \{\sigma_1, \sigma_2\} = 0$. //

Si possono quindi costruire le matrici gamma per tutte le dimensioni D pari.

In particolare, per $D=4$:

(*)
$$\gamma^0 = \sigma_1 \otimes \sigma_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\ \hline 0&1&0&0\\1&0&0&0 \end{array}\right)$$

$$\gamma^1 = i\sigma_2 \otimes \sigma_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\ \hline 0&-1&0&0\\-1&0&0&0 \end{array}\right)$$

$$\gamma^2 = \mathbb{1} \otimes i\sigma_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0&1&0&0\\-1&0&0&0\\ \hline 0&0&0&1\\0&0&-1&0 \end{array}\right)$$

$$\gamma^3 = \mathbb{1} \otimes i\sigma_3 = \left(\begin{array}{cc|cc} i&0&0&0\\0&-i&0&0\\ \hline 0&0&i&0\\0&0&0&-i \end{array}\right)$$

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 =$$
$$\gamma_* = i(\sigma_1\otimes\sigma_1)(i\sigma_2\otimes\sigma_1)\cdot$$
$$\cdot(\mathbb{1}\otimes i\sigma_2)(\mathbb{1}\otimes i\sigma_3) =$$
$$= (i\sigma_3)\otimes(i\sigma_1) = \sigma_3\otimes\sigma_1 =$$
$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\ \hline 0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{array}\right)$$

→ Lo spinore di Dirac è un quadrivettore.

- È comodo scegliere la base (sullo spazio su cui agiscono le γ^μ) in modo che la matrice γ_5 sia DIAGONALIZZATA, cioè sia

$$\gamma_5 = \left(\begin{array}{c|c} -\mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{1} \end{array}\right)$$

La matrice del cambiamento di base (rispetto a (*)) è

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -i & i \\ 1 & 1 & i & -i \\ i & -i & 1 & 1 \\ -i & i & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Applicando q.to cambiam. di base alle matrici γ ($\gamma^\mu \mapsto U\gamma^\mu U^{-1}$), otteniamo

$$\gamma^0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & 0 \end{array}\right) \qquad \gamma^i = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \sigma^i \\ \hline -\sigma^i & 0 \end{array}\right) \rightarrow \gamma^\mu = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \sigma^\mu \\ \hline \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{array}\right) \qquad (\bullet)$$

con $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma^i)$ e $\bar{\sigma}^\mu(\mathbb{1}, -\sigma^i)$

- Definiamo $\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ ← Q.te forniscono una rappresentazione dell'alg. di $SO(1,3)$

• Verifichiamo che i commutatori $[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}]$ riproducono l'algebra di Lorentz.

$[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] = 2\gamma^\alpha\gamma^\beta - 2\eta^{\alpha\beta}\mathbb{1}$ for $\alpha\neq\beta$

$$-4i[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = [[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\rho]$$

$\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\gamma^\mu\gamma^\nu - \cancel{2\eta^{\mu\nu}}\mathbb{1}$ se $\mu\neq\nu$

$$= 2[\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\rho] = 2\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - 2\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu$$

$$= 2\gamma^\mu(-\cancel{\gamma^\rho\gamma^\nu} + 2\eta^{\rho\nu}) - 2(-\cancel{\gamma^\mu\gamma^\rho} + 2\eta^{\rho\mu})\gamma^\nu$$

$$= 4\eta^{\rho\nu}\gamma^\mu - 4\eta^{\rho\mu}\gamma^\nu$$

$(M_{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = \delta_\nu^\rho\eta_{\mu\sigma} - \delta_\mu^\rho\eta_{\nu\sigma}$

$(M^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma V^\sigma = \eta^{\nu\rho}V^\mu - \eta^{\mu\rho}V^\nu$

$$\Rightarrow [\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(\eta^{\nu\rho}\gamma^\mu - \eta^{\mu\rho}\gamma^\nu) = i(M^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma\gamma^\sigma$$

• $$[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho\gamma^\sigma] = i(\eta^{\nu\rho}\gamma^\mu - \eta^{\mu\rho}\gamma^\nu)\gamma^\sigma - i\gamma^\rho(\eta^{\nu\sigma}\gamma^\mu - \eta^{\mu\sigma}\gamma^\nu)$$

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho] = i\eta^{\nu\rho}[\gamma^\mu, \gamma^\sigma] - i\eta^{\mu\rho}[\gamma^\nu, \gamma^\sigma]$$
$$i\eta^{\nu\sigma}[\gamma^\rho, \gamma^\mu] - i\eta^{\mu\sigma}[\gamma^\rho, \gamma^\nu]$$

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\rho\nu})$$

Ricordiamo che $[\overset{-i}{M}_{\mu\nu}, \overset{-i}{M}_{\rho\sigma}] = \overset{-i}{(}\eta_{\mu\rho}\overset{-i}{M}_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho})$

$\Rightarrow$ Le matrici $\rho_R(M_{\mu\nu}) = i\Sigma_{\mu\nu}$ rappresentano i generatori dell'algebra $so(1,3)$ (cioè $sl(2,\mathbb{C})$ vista come algebra reale).

• Calcoliam esplicitam. $\Sigma_{\mu\nu}$ nella base (•)

$$\Sigma^{0i} = \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} -2\sigma_i & \\ & 2\sigma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\frac{\sigma_i}{2} & \\ & +i\frac{\sigma_i}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^{ij} = +\frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = +\frac{i}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}\right] = -\frac{i}{4}\begin{pmatrix} [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \\ 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_k}{2} & \\ & \frac{\sigma_k}{2} \end{pmatrix}\epsilon_{ijk}$$

dove $\rho(iK_i) = \rho(M_{0i}) = i\,\Sigma_{0i} = -i\Sigma^{0i} = i\begin{pmatrix} \frac{i\sigma_i}{2} & \\ & -\frac{i\sigma_i}{2} \end{pmatrix}$

$\rho(i\epsilon_{ijk}M_k) = \rho(M_{ij}) = i\Sigma_{ij} = i\Sigma^{ij} = i\epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \frac{\sigma_k}{2} & \\ & \frac{\sigma_k}{2} \end{pmatrix}$

Possiamo ora scrivere l'elem $e^{i\alpha^i M_i + i\beta^i K_i} \in SL(2,\mathbb{C})$ nella rap. appena trovata:

$$\rho(\exp(i\alpha_i M_i + i\beta_j K_j)) = \exp\left(i\alpha^i \begin{pmatrix} \sigma^i/2 & 0 \\ 0 & \sigma^i/2 \end{pmatrix} + i\beta_j \begin{pmatrix} +\frac{i\sigma_j}{2} & \\ & -i\sigma_j/2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \exp\begin{pmatrix} i(\alpha^i + i\beta^i)\sigma^i/2 & \\ & i(\alpha^i - i\beta^i)\sigma^i/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{iz^i\sigma^i/2} & \\ & e^{i\bar{z}^i\sigma^i/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_L & \\ & g_R \end{pmatrix}$$

$g_R = (g_L^{-1})^\dagger$ $\quad \tilde{g}_R = \varepsilon^{-1} g_R \varepsilon$ $\quad \sim e^{-i\bar{z}^i\sigma^{i*}/2} = \tilde{g}_R$

$-\sigma^{i*} = \varepsilon^{-1}\sigma^i\varepsilon$
$\varepsilon = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \text{Dirac spinor rep} \\ \text{of } \gamma\text{-matrices} \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}, 0\right)}_{\gamma_5 = -1} \oplus \underbrace{\left(0, \tfrac{1}{2}\right)}_{\gamma_5 = 1}}$$

Rep. riducibile del gruppo di Lorentz

$$\underbrace{\psi}_{\text{Dirac spinor}} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

Weyl spinors

• Consideriamo i seguenti bilineari $\quad (\bar\psi = \psi^\dagger \gamma^0)$

$$\bar\psi\psi \qquad \bar\psi\gamma^5\psi$$

$$\bar\psi\gamma^\mu\psi \qquad \bar\gamma\gamma^\mu\gamma^5\psi$$

e vediamo come trasformano sotto Lorentz.

• $\bar\psi = \psi^\dagger\gamma^0 = (\psi_L^\dagger \ \psi_R^\dagger)\begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1 \\ 1\!\!1 & 0 \end{pmatrix} = (\psi_R^\dagger \ \psi_L^\dagger)$

• $\bar\psi\psi = \psi_R^\dagger\psi_L + \psi_L^\dagger\psi_R$

$$\psi_R^\dagger\psi_L \mapsto \left(e^{i\bar z^i\sigma^i/2}\psi_R\right)^\dagger\left(e^{iz^i\sigma^i/2}\psi_L\right) = \psi_R^\dagger e^{-iz^i\sigma^i/2} e^{iz^i\sigma^i/2}\psi_L = \psi_R^\dagger\psi_L$$

$$\psi_L^\dagger\psi_R \mapsto \ldots = \psi_L^\dagger\psi_R$$

$\Rightarrow \bar\psi\psi$ è un singoletto sotto Lorentz.

Nota che ψ_R^* e $\psi_L \in (1/2, 0)$ e $\psi_R^\dagger\psi_L \in (1/2,0)\otimes(1/2,0) = \underline{(0,0)}\oplus(1,0)$

• $\bar\psi\gamma_5\psi = (\psi_R^\dagger \ \psi_L)\begin{pmatrix} -1\!\!1 & \\ & 1\!\!1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = -\psi_R^\dagger\psi_L + \psi_L^\dagger\psi_R$

è pure un singoletto sotto gruppo Lorentz proprio.

• $\bar\psi\gamma^\mu\psi = (\psi_R^\dagger \ \psi_L)\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \psi_R^\dagger\sigma^\mu\psi_R + \psi_L^\dagger\bar\sigma^\mu\psi_L$

$$\psi_L^\dagger\bar\sigma^\mu\psi_L \mapsto \psi_L^\dagger \underbrace{e^{-iz^i\sigma^i/2}\,\bar\sigma^\mu\, e^{iz^i\sigma^i/2}}_{\Lambda^\mu{}_\nu\bar\sigma^\nu \ (*)}\psi_L = \Lambda^\mu{}_\nu\, \psi_L^\dagger\sigma^\mu\psi_L$$

trasforma come un quadrivettore; lo stesso vale per

$$\psi_R^\dagger\sigma^\mu\psi_R \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu\, \psi_R^\dagger\sigma^\mu\psi_R$$

(*)

$$g_L V^\nu \sigma_\nu g_L^\dagger = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu \sigma_\mu$$

$g_R = (g_L^{-1})^\dagger \quad \tilde{g}_R = \varepsilon^{-1} g_R \varepsilon = g_L^*$

$g_L = e^{i z\sigma/2} \quad g_R = e^{i\bar{z}\sigma/2} \quad \tilde{g}_R = e^{-i\bar{z}\sigma^*/2} = g_L^*$

$$g_L \sigma_\nu g_L^\dagger = \Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu$$

$\Lambda^\mu{}_\nu = \eta_{\nu\beta} (\Lambda^{-1})^\beta{}_\alpha \eta^{\alpha\mu}$

$$g_R^\dagger \sigma^\mu g_R = \eta^{\mu\alpha} g_L^{-1} \sigma_\alpha (g_L^{-1})^\dagger = \eta^{\mu\alpha} \Lambda^{-1\beta}{}_\alpha \sigma_\beta = \eta^{\mu\alpha} (\Lambda^{-1})^\beta{}_\alpha \eta_{\beta\nu} \sigma^\nu$$
$$= \Lambda^\mu{}_\nu \sigma^\nu$$

$$g_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu g_L = \varepsilon^{-1} g_R^T \underbrace{\varepsilon \bar{\sigma}^\mu \varepsilon^{-1}}_{(\mathbb{1}, \sigma^{i*})} g_R^* \varepsilon = \varepsilon^{-1} g_R^T (\sigma^\mu)^* g_R^* \varepsilon = \varepsilon^{-1} (g_R^\dagger \sigma^\mu g_R)^* \varepsilon =$$
$$= \Lambda^\mu{}_\nu \varepsilon^{-1} (\sigma^\mu)^* \varepsilon = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\mu$$

$g_L = \varepsilon^{-1} g_R^* \varepsilon$

Gruppo di Poincaré

- Gruppo di simmetrie dello spazio-tempo includono le trasf. di Lorentz e le traslazioni spazio-temporali.

- $\Lambda \in SO(1,3)$ e $a \in \mathbb{R}^{1,3}$, abbiamo una trasf. combinata

$$(\Lambda, a) : x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

- Qte trasf. formano un gruppo con la seguente regola di composizione:

$$(\Lambda_2, a_2) \cdot (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$$

con inverso

$$(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1} a)$$

e identità $(\mathbb{1}, 0)$.

$$x \xmapsto{(\Lambda_1, a_1)} \Lambda_1 x + a_1 \xmapsto{(\Lambda_2, a_2)} \Lambda_2 \Lambda_1 x + \Lambda_2 a_1 + a_2$$

$$x \xmapsto{(\Lambda, a)} \Lambda x + a \xmapsto{(\Lambda, a)^{-1}} \Lambda^{-1}(\Lambda x + a) - \Lambda^{-1} a = x$$

- Il gruppo corrispondente si chiama **GRUPPO di POINCARÉ**.

Esso ha come sottogruppi:

- Lorentz. $(\Lambda, 0)$ $\leftarrow$ 6 generators $M_{\mu\nu}$
- Trasl. T_4 $(\mathbb{1}, a)$ $\leftarrow$ 4 generators P_μ

normal subgroup

$$(\Lambda, a) = (\mathbb{1}, a)(\Lambda, 0)$$

Gruppo Poincaré $\cong O(1,3) \ltimes T_4$

Definiamo la seguente trasf:

$$(\Lambda, a) = (\Lambda_2, a_2)^{-1} (\Lambda_1, a_1)^{-1} (\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) \qquad (*)$$

$$\rightsquigarrow \quad \Lambda = \Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1} \Lambda_2 \Lambda_1$$
$$a = \Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1} (\Lambda_2 a_1 - \Lambda_1 a_2 - a_1 + a_2)$$

In una rep. R

$$\rho_R(\Lambda, a) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} \rho_R(M_{\mu\nu}) + i a^\mu \rho_R(P_\mu)}$$

$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$

Da $(*)$ possiamo ricavare le regole di commutazione:

- consideriamo trasf. infinitesime (modo pratico per prendere il lim. e andare allo sp. tg. del gruppo in $\mathbb{1}$).

- $(*)$: $\mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + i a^\mu P_\mu =$ ← omettiamo simbolo ρ_R per semplicità di notazione

$$= \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega_2^{\mu_2\nu_2} M_{\mu_2\nu_2} - i a_2^{\mu_2} P_{\mu_2}\right)\left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega_1^{\mu_1\nu_1} M_{\mu_1\nu_1} - i a_1^{\mu_1} P_{\mu_1}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega_2^{\mu_2'\nu_2'} M_{\mu_2'\nu_2'} + i a_2^{\mu_2'} P_{\mu_2'}\right)\left(\mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega_1^{\mu_1'\nu_1'} M_{\mu_1'\nu_1'} + i a_1^{\mu_1'} P_{\mu_1'}\right) =$$

$$= \Big(\mathbb{1} - i A_2^{\vee} \overset{-A_2^2/2}{}\Big)\Big(1 - i A_1^{\vee} \overset{-A_1^2/2}{}\Big)\Big(1 + i A_2^{\vee} \overset{-A_2^2/2}{}\Big)\Big(1 + i A_1^{\vee} \overset{-A_1^2/2}{}\Big) =$$

$$= (\mathbb{1} - \cancel{A_2 A_1} + A_2^2 + \cancel{A_2 A_1} + A_1 A_2 + A_1^2 - A_2 A_1)$$

$$= \mathbb{1} + \underbrace{\cancel{A_1^2} + \cancel{A_2^2}}_{\text{si cancellano con ordini successivi}} - [A_2, A_1]$$

$$= \mathbb{1} - \left[\tfrac{1}{2}\omega_2^{\mu\nu} M_{\mu\nu} - a_2^\mu P_\mu \,,\, \tfrac{1}{2}\omega_1^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} - a_1^\rho P_\rho\right]$$

• Il LHS dipende da a^μ e $\omega^{\mu\nu}$ che sono funzioni di $a_1, a_2, \omega_1, \omega_2$. Per capire come, consideriamo ancora trasf. infinitesime: $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$.

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$$
$$\overset{!}{=} (\Lambda_2^{-1}\Lambda_1^{-1}\Lambda_2\Lambda_1)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + [\omega_2, \omega_1]^\mu{}_\nu$$

Per le traslaz. (a^μ infinitesimi):

$$a^\mu = [\Lambda_2^{-1}\Lambda_1^{-1}(\Lambda_2 a_1 - \Lambda_1 a_2 - a_1 + a_2)]^\mu$$
$$\overset{!}{=} \omega_2{}^\mu{}_\nu a_1^\nu - \omega_1{}^\mu{}_\nu a_2^\nu \quad \leftarrow (1-\omega_2^{-})(1-\omega_1^{-})((\cancel{1}+\omega_2)a_1 - (\cancel{1}+\omega_1)a_2 - \cancel{a_1} + \cancel{a_2})$$

• Da (*) abbiamo quindi ottenuto

$$-i\,[\omega_2,\omega_1]^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + i(\omega_2 a_1 - \omega_1 a_2)^\mu P_\mu = \qquad \forall \omega_1, \omega_2, a_1, a_2$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}\omega_2^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} + a_2^\alpha P_\alpha \,,\, \tfrac{1}{2}\omega_1^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} + a_1^\rho P_\rho\right]$$

$\Downarrow$ confrontando coeff. di stessa comb. dei parametri

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = 2i\eta_{\rho\mu} M_{\nu\sigma} - 2i\eta_{\rho\nu} M_{\mu\sigma} + 2i\eta_{\sigma\mu} M_{\rho\nu} - 2i\eta_{\sigma\nu} M_{\rho\mu}$$
$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = i(\eta_{\nu\sigma} P_\mu - \eta_{\mu\sigma} P_\nu)$$
$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

Se scomponiamo $P_\mu = (H, -P_i)$, possiamo riscrivere qte regole di comm.:

$[J_i, H] = 0 \quad [K_i, H] = i P_i \quad [J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk} P_k \quad [K_i, P_j] = i\delta_{ij} H$

oltre a qle dell'alg. di Lorentz $[J,J] = J$, $[J,K] = K$, $[K,K] = J$.

Il commutatore $[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = i(\eta_{\nu\sigma} P_\mu - \eta_{\mu\sigma} P_\nu)$ ci dice che P^μ trasforma come un quadrivettore sotto Lorentz

$$e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}} P_\sigma \, e^{+\frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}} =$$

$$= \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right) P_\sigma \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}\right) =$$

$$= P_\sigma - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}[M_{\mu\nu}, P_\sigma] =$$

$$= P_\sigma - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\left(2i\eta_{\nu\sigma} P_\mu\right) =$$

$$= P_\sigma + P_\mu \omega^\mu{}_\sigma = P_\mu\left(\delta^\mu{}_\sigma + \omega^\mu{}_\sigma\right) =$$

$$= P_\mu \Lambda^\mu{}_\sigma \, .$$

RAPPRESENTAZIONI del gruppo di Poincaré

- Ricordiamo : $x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ sotto Poincaré

  dove Λ t.c. $\Lambda^\nu{}_\rho \Lambda^\mu{}_\sigma \eta^{\rho\sigma} = \eta^{\nu\mu}$, $(\det\Lambda)^2 = 1$

  e $(\Lambda^{-1})^\rho{}_\alpha = \eta_{\alpha\mu}\eta^{\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_\sigma \equiv \Lambda_\alpha{}^\rho$ $(\cdot \Lambda^\nu{}_\rho = \eta_{\alpha\mu}\cdot\eta^{\mu\nu} = \delta_\alpha{}^\nu \ \checkmark)$

- Consideriamo rep. $\rho(\Lambda, a)$; allora

  $\rho(\Lambda_2, a_2)\cdot\rho(\Lambda_1, a_1) = \rho(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$

- Chiamiamo $U(\Lambda) \equiv \rho(\Lambda, 0)$ e $T(a) \equiv \rho(\mathbb{1}, a)$.

- I generatori P_μ commutano fra loro, quindi le matrici che li rappresentano possono essere diagonalizzate simultaneamente. Abbiamo così una base di autovett.:

  $P_\mu |p, i\rangle = p_\mu |p, i\rangle \qquad i = 1, \dots, \deg(p_\mu)$

- Cerchiamo rep. in cui $\deg(p_\mu)$ siano finite.

- Le traslazioni lasciano invarianti gli autospazi V_p.

  In realtà lasciano inv. i sottosp. 1 dim. gen. da ogni singolo autovett. [T_a è abeliano] :

  $$T(a)|p,i\rangle = e^{ia^\mu P_\mu}|p,i\rangle = e^{ia^\mu p_\mu}|p,i\rangle$$

- Le trasf. di Lorentz Λ non lasciano invariato V_p, ma mandano un vett. di V_p in un vett. di $V_{\Lambda^{-1}p}$:

$$P_\mu [U(\Lambda)|p,i\rangle] = U(\Lambda)U(\Lambda)^{-1} P_\mu U(\Lambda)|p,i\rangle =$$
$$= U(\Lambda)\left(P_\rho \Lambda^{-1\rho}{}_\mu\right)|p,i\rangle \qquad (*)$$
$$= (p\Lambda^{-1})_\mu |p,i\rangle$$

$(*) \Rightarrow$ 1) La somma diretta dei V_p con p collegati da trasf. di Lorentz (cioè con lo stesso p^2) forma una RAPP. di Poincaré.

$(*) \Rightarrow$ 2) L'autospazio V_p è RAPPRESENTAZIONE per il sottogruppo $H_p \subset SO(1,3)$ che lascia p invariato

- $H_k \subset SO(1,3)$: $\qquad H_k = \{\Lambda \in SO(1,3) \mid \Lambda k = k\}$

è chiamato "Little group".

Se $\Lambda \in H_k$ allora $\qquad P_\mu[U(\Lambda)|k,i\rangle] = k_\mu U(\Lambda)|k,i\rangle$

$$\Rightarrow U(\Lambda)|k,i\rangle = \sum_j C_{ji}(\Lambda)|k,j\rangle \leftarrow$$ $|k,i\rangle$ forniscono rapp. di H_k !

$$U(\Lambda_2\Lambda_1)|k,i\rangle = \sum_m C_{mi}(\Lambda_2\Lambda_1)|k,m\rangle \qquad \Lambda_1,\Lambda_2 \in H_k$$
$$\parallel$$
$$U(\Lambda_2)U(\Lambda_1)|k,i\rangle = U(\Lambda_2)\sum_\ell C_{\ell i}(\Lambda_1)|k,\ell\rangle = \sum_\ell C_{\ell i}(\Lambda_1)U(\Lambda_2)|k,\ell\rangle =$$
$$= \sum_{\ell,m} C_{m\ell}(\Lambda_2)C_{\ell i}(\Lambda_1)|k,m\rangle \Rightarrow C_{mi}(\Lambda_2\Lambda_1) = \sum_\ell C_{m\ell}(\Lambda_2)C_{\ell i}(\Lambda_1)$$

- Prendiamo l'insieme di tutti i p^μ con p^2 fissato.

Scegliamo un k^μ in questo insieme; tutti gli altri sono dati da

$$p^\mu = L(p)^\mu{}_\rho\, k_\rho$$

per una data trasf. di Lor. $L(p)$.

Dato un vett. $|k,i\rangle$, posso definire un vett.

$$|p,i\rangle = U(L(p))\,|k,i\rangle$$

Agiamoci con trasf. Lorentz generica:

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda)|p,i\rangle &= U(\Lambda)\,U(L(p))\,|k,i\rangle = \\
&= U(\Lambda L(p))\,|k,i\rangle = \\
&= U(L(\Lambda p))\,U(\underbrace{L(\Lambda p)^{-1}\Lambda\, L(p)}_{\equiv W(\Lambda,p)\in H_k})\,|k,i\rangle \\
&= U(L(\Lambda p))\sum_j C_{ji}(W(\Lambda,p))\,|k,j\rangle \\
&= \sum_j C_{ji}(W(\Lambda,p))\;U(L(\Lambda p))|k,j\rangle = \\
&= \sum_j C_{ji}(W(\Lambda,p))\,|\Lambda p,j\rangle
\end{aligned}
$$

$: \; L(\Lambda p)^{-1}\Lambda\, L(p)\, k = L(\Lambda p)^{-1}\Lambda p = k$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Se abbiamo una RAPP. per il "Little group", poi abbiamo anche le matrici che danno la rap. di Poincaré.}}$

Vediamo i piccoli gruppi per varie scelte di orbite di Lorentz:

$p^2 = m^2$	$p^0 > 0$	$k = (m, 0, 0, 0)$	$H_k = SO(3)$	
$p^2 = m^2$	$p^0 < 0$	$k = (-m, 0, 0, 0)$	$H_k = SO(3)$	
$p^2 = 0$	$p^0 > 0$	$k = (E, 0, 0, E)$	$H_k = ISO(2)$	← rototraslaz. sul piano
$p^2 = 0$	$p^0 < 0$	$k = (-E, 0, 0, E)$	$H_k = ISO(2)$	
$p^2 = -\alpha^2$	$p^0 = 0$	$k = (0, 0, 0, \alpha)$	$H_k = SO(1,2)$	
$p^2 = 0$	$p^0 = 0$	$k = (0, 0, 0, 0)$	$H_k = SO(1,3)$	

ES 1 : MASSIVE particle

$H_K = SO(3)$ ⇝ rapp. del piccolo gruppo sono le rapp. di $SO(3)$ che sono quindi labellate da un $s \in \mathbb{Z}/2$ (includendo rap. spinoriali), di dim. $2s+1$.

→ questo è quello che viene chiamato lo SPIN della particella

→ gli stati quantistici delle particelle relativistiche si trasformano sotto rotazioni come gli stati delle particelle in MQ non-rel.

ES2: MASSLESS particle

Determiniamo H_k, per $k^\mu = (1,0,0,1)$

Cerchiamo $W \in SO(1,3)$ t.c. $W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$.

Def. $t^\mu = (1,0,0,0)$. W soddisfa $(Wt)^\mu (Wt)_\mu = t^\mu t_\nu = 1$ $(\bullet_1)$

e $(Wt)^\mu k_\mu = k_\mu W^\mu{}_\rho t^\rho = k_\rho t^\rho = 1$ $(\bullet_2)$

$$\Rightarrow (Wt)^\mu \overset{(\bullet_2)}{=} (1+\varsigma, \alpha, \beta, \varsigma) \quad e \quad \varsigma \overset{(\bullet_1)}{=} \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

Lo stesso risultato si ottiene applicando a t^μ la seguente trasf. di Lorentz:

$$S(\alpha,\beta)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1+\varsigma & \alpha & \beta & -\varsigma \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \varsigma & \alpha & \beta & 1-\varsigma \end{pmatrix} \qquad \text{con } \varsigma = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

$\Rightarrow$ $S^{-1}W$ lascia invariato t^μ $\Rightarrow$ $S^{-1}W \in SO(3) \subset SO(1,3)$

Inoltre $Sk = k$ $\Rightarrow$ $S^{-1}W \in H_k$, cioè è una rotazione che lascia invariato k $\Rightarrow$ $S^{-1}W$ è una rotaz. attorno all'asse z:

$$S^{-1}(\alpha,\beta)\, W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv R(\theta)$$

$\Rightarrow$ Un generico $W \in H_k$ è parametrizzato da tre parametri α, β, θ:

$W(\alpha,\beta,\theta) = S(\alpha,\beta)\, R(\theta)$

- $\theta = 0 \rightsquigarrow$ sottogruppo con elem. $S(\alpha,\beta)$

$$S(\alpha_2,\beta_2)\, S(\alpha_1,\beta_1) = S(\alpha_2+\alpha_1,\ \beta_2+\beta_1)$$

- $\alpha=\beta=0 \rightsquigarrow$ sottogr. con elem. $R(\theta)$

$$R(\theta_2)R(\theta_1) = R(\theta_2+\theta_1)$$

$\rightarrow$ sottogruppi ABELIANI

Inoltre abbiamo: $R(\theta)\, S(\alpha,\beta)\, R(\theta)^{-1} = S(\alpha\cos\theta+\beta\,\mathrm{sen}\,\theta,\ -\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta+\beta\cos\theta)$

$\rightarrow$ questo ci dà il gruppo $ISO(2)$ delle rototraslaz. sul piano (θ angolo rotaz., (α,β) vett. di trasl.)

($ISO(2)$ non è un gruppo semisemplice)

$$W(\alpha,\beta,\theta) = e^{i\alpha A + i\beta B + i\theta J_3}$$

con $A = -M^{13} + M^{10} = J_2 + K_1$

e $B = -M^{23} + M^{20} = -J_1 + K_2$

Abbiamo allora le regole di comm. tra i gen:

$[J_3, A] = iB \qquad [J_3, B] = -iA \qquad [A, B] = 0$

Cerchiamo le rep. del piccolo gruppo ISO(2):

A e B possono essere sim. diag.

$$A\,|k;a,b\rangle_i = a\,|k,a,b\rangle_i$$
$$B\,|k;a,b\rangle_i = b\,|k,a,b\rangle_i \qquad i \to \text{degenerat.}$$

Siccome
$$\begin{cases} U(R(\theta))\,A\,U^{-1}(R(\theta)) = A\cos\theta - B\,\text{sen}\,\theta \\ U(R(\theta))\,B\,U^{-1}(R(\theta)) = A\,\text{sen}\,\theta + B\cos\theta \end{cases}$$

allora i vett. $U^{-1}(R(\theta))\,|k;a,b\rangle_i$ sono anche autovett. di A e B con autovalori $a\cos\theta - b\,\text{sen}\,\theta$ e $a\,\text{sen}\,\theta + b\cos\theta$

$\Rightarrow$ c'è un continuo di vett. appartenenti alla rap., relativi ad autoval. distinti (se $(a,b) \neq (0,0)$).

In fisica qte sarebbero identificati come un continuo di particelle massless diverse. Ma qto non si osserva.

Imponiamo allora $a=b=0$ per gli stati fisici (ad hoc!)

$\Rightarrow$ stati di particella massless sono ora $|k,m\rangle$

dove m è l'autovalore del terzo gen. J_3

$$J_3\,|k,m\rangle = m\,J_3$$

Notiamo che $\vec{k}$ è proprio nella direz. z $\Rightarrow$ m è l'HELICITY, cioè la componente dello spin nella direzione del moto.

Ma manda $|k,m\rangle$ in $|k,m\rangle$. Parity $\Rightarrow$ $|k,-m\rangle$ da includere.