

Preappello Ist. Matematiche A (Scienze Geologiche) – Prof. Fabio Vlacchi
A.A. 2024/2025

LEGGERE ATTENTAMENTE IL TESTO E GIUSTIFICARE (QUANDO RICHIESTO) LE RISPOSTE AI QUESITI.

Scrivere il proprio

NOME

COGNOME

NUMERO MATRICOLA

1. Mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 0$), il numero $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ è un multiplo di 7.

Calcolare inoltre, se esiste,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n+1} + 2^{n+2}}{6^n}.$$

2. Date due successioni di numeri reali positivi $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, diremo che esse sono in relazione $\mathcal{R}$ se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq 1.$$

Stabilire se la relazione $\mathcal{R}$ risulta transitiva; può la relazione $\mathcal{R}$ essere di equivalenza?

3. In un riferimento cartesiano ortogonale, si consideri la sfera $\mathcal{S}$ di raggio $r = \sqrt{2}$ e centro il punto C di coordinate $(-1, 2, 1)$; si stabilisca se i punti $A = (1, 1, -1)$ e $B = (0, 2, 0)$ appartengono o sono interni alla sfera $\mathcal{S}$. Qualora uno di tali punti appartenga alla sfera $\mathcal{S}$, si determini l'equazione del piano tangente alla sfera $\mathcal{S}$ in tale punto. Si individuino inoltre

a) l'equazione della retta passante per A e per B ;

b) la lunghezza del segmento $\overline{AB}$;

c) le coordinate polari dei punti A' e B' , proiezioni di A e di B rispettivamente sul piano xy .

4. Si calcolino, se esistono,

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(\cos n - 1)}{n^2 + 1} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln \sqrt{\frac{1}{x^2} + 6} - \ln \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x}} \right] \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \cos x + x^2}{2x \sin x + 2^x}$$

5. Si tracci un grafico significativo della funzione

$$f(x) = |x|e^{1/x}$$

individuando le eventuali simmetrie e gli asintoti di f oltre ai possibili punti di massimo, minimo, di flesso e/o angolosi di f .

Si stabilisca, poi, se ponendo $f(0) = 0$, la funzione f può essere estesa con continuità nell'origine.

Si trovi l'equazione cartesiana della retta passante per il punto di coordinate $(0, 2)$ e ortogonale alla retta tangente al grafico della funzione f nel punto di coordinate $(1, e)$.