Tutorato Analisi Matematica 1 - 2025/2026

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 11 - Calcolo di integrali, limiti e studi di funzione - 11/12/2025

Richiamo

- $f: I \to \mathbb{R}$ è primitivabile se esiste $F: I \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $F'(x) = f(x)$

$\hookrightarrow$ primitiva di f

Se f è primitivabile è anche integrabile (e ammette infinite primitive definite a meno di una costante)

Si indica $F(x) = \int f(x)\,dx$, e nel caso di integrale definito si ha $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

- Per trovare una primitiva di f dobbiamo farne l'"antiderivata": le regole del calcolo integrale seguono dalle regole delle derivate:

- $\frac{d}{dx}\big(F(x)\big) = f(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) + c = \int f(x)\,dx \quad , \quad F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

- $\frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \Rightarrow \quad f(g(x)) + c = \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$

$$f(g(b)) - f(g(a)) = \int_a^b f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

- $\frac{d}{dx}\big(f(x)\,g(x)\big) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

$$\Rightarrow f(x)\,g(x) + c = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

"Scarico" la derivata da una funzione all'altra cambiando segno

$$\Rightarrow \int f'(x)\,g(x)\,dx = -\int f(x)\,g'(x)\,dx + f(x)\,g(x) + c$$

(per parti)

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx + f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)$$

- Spesso è utile la primitivazione / integrazione per sostituzione:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \left[\int f(t)\,dt\right]\Bigg|_{t=g(x)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= g(x) \\ dt &= g'(x)\,dx \end{aligned}}$$

↳ alla fine devo tornare alla variabile x

→ utile se riconosco di avere una funzione integranda di quella forma!

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

- In generale una sostituzione del tipo

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(g^{-1}(t))\left[\frac{1}{g'(x)}\right]\Bigg|_{x=g^{-1}(t)} dt\right]\Bigg|_{t=g(x)}$$

$t = g(x) \rightarrow x = g^{-1}(t)$

$dt = g'(x)\,dx \rightarrow dx = \left[\dfrac{1}{g'(x)}\right]\Bigg|_{x=g^{-1}(t)} dt$

oppure

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt\right]\Bigg|_{t=g^{-1}(t)}$$

$x = g(t)$

$dx = g'(t)\,dt$

può essere fatta solo se g è invertibile!

↳ se l'integrale è $\int_a^b$, l'invertibilità è richiesta nell'intervallo necessario

ESERCIZI

Es. 1 (immediati o sostituzioni semplici)

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3\cos x} \operatorname{sen} x \, dx$ ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3e^{\arctan x}}{1+x^2} \, dx$ iii) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1} \, dx$ iv) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \, dx$

Es. 2 (sfruttare la simmetria)

i) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} x \, |\tan x| \, dx$ ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{senh}(\tan x^5) \, dx$ iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos(2x) \, dx$ iv) $\displaystyle\int_0^6 [\operatorname{sen}(x-3)]^7 \, dx$

Es. 3 (per parti e con valore assoluto)

i) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x \, dx$ ii) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x \, dx$ iii) $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx$

iv) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3 |1-x| \, dx$ v) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x \, |1-e^{2x}| \, dx$ vi) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\tan x| \, dx$

Es. 4 (21/02/2023 A)

Si studi la funzione $f(x) = x \log(x^2+4) + 4 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 4x$, determinando

i) dominio ii) limiti importanti iii) asintoti iv) derivata prima e segno
v) cresc./decresc., max./min. locali o globali vi) derivata seconda e segno vii) conc./conv./flessi
viii) simmetrie ix) grafico di f.

Es. 5

Risolvere i seguenti limiti con la regola di l'Hopital.

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2}$ ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{x}$ iii) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x \log\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$ iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\tan x} - \frac{1}{x^2}\right)$

v) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ vi) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ vii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x+\sqrt{x}}$ viii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$

SVOLGIMENTI

Es.1

i) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3\cos x} \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3\cos x} \overbrace{(-3\operatorname{sen} x)}^{\text{derivata di } 3\cos x} dx = -\frac{1}{3}\left[e^{3\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(e^{3\cos\frac{\pi}{4}} - e^{3\cos 0}\right) = -\frac{1}{3}\left(e^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} - e^{3}\right)$$

- Oppure con sostituzione:

$$t = 3\cos x \rightarrow dt = -3\operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{3} dt$$

Gli estremi diventano: $x = 0 \rightarrow t = 3\cos 0 = 3$, $x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = 3\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3\cos x} \operatorname{sen} x \, dx = \int_3^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} e^{t}\left(-\frac{1}{3}dt\right) = -\frac{1}{3}\int_3^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} e^{t} dt = -\frac{1}{3}\left[e^{t}\right]_3^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{3}\left(e^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} - e^{3}\right)$$

- Oppure con sostituzione

$$t = e^{3\cos x} \rightarrow dt = e^{3\cos x}(-3\operatorname{sen} x)\, dx \quad , \quad x = 0 \rightarrow t = e^{3} \quad , \quad x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = e^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

$\hookrightarrow e^{3\cos x} \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{3} dt$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3\cos x} \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{3}\int_{e^{3}}^{e^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}} dt = -\frac{1}{3}\left(e^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} - e^{3}\right)$$

ii) $$\int_0^{1} \frac{3e^{\arctan x}}{1+x^2} dx = 3\int_0^{1} \frac{1}{1+x^2} e^{\arctan x} dx = 3\left[e^{\arctan x}\right]_0^{1}$$

$$= 3\left(e^{\arctan 1} - e^{\arctan 0}\right) = 3\left(e^{\frac{\pi}{4}} - 1\right)$$

(oppure con sostituzione $t = \arctan x$, $dt = \frac{dx}{1+x^2}$)

(oppure $t = e^{\arctan x}$, $dt = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx$)

iii) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \boxed{\frac{2x}{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\left[\log|x^2+1| + c\right] = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \boxed{\frac{c}{2}}$

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \log|f(x)|$

$\frac{c}{2}$ o c sono sempre costanti, quindi spesso la si indica sempre con c anche se sono 2 costanti diverse...

(oppure con $t = x^2+1$, $dt = 2x\,dx$)

iv) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx = \int x\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}\,dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c\right] =$

$t = 1-x^2$

$dt = -2x\,dx \to x\,dx = -\frac{1}{2}t$

$\displaystyle = t^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{t}} + c = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c$ → se l'integrale è indefinito, dobbiamo tornare alla variabile iniziale!

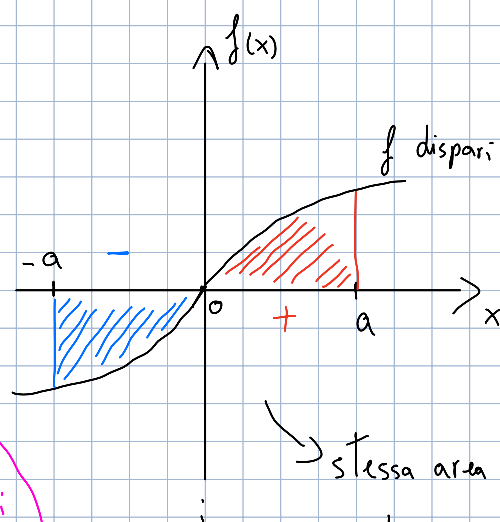
(o immediato: → $\displaystyle -\frac{1}{2}\int -2x\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \big/ -\frac{1}{2}\right] = (1-x^2)^{-1/2}$

Es. 2

i) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} x\,|\tan x|\,dx$ → la funzione integranda è dispari infatti:

$f(x) = x\,|\tan x|$, $f(-x) = -x\,|\tan(-x)| = -x\,|-\tan x| = -x\,|\tan x|$
$= -f(x)$

Inoltre l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto 0, dunque l'integrale è nullo.



stessa area ma con segno opposto ⇒ si annullano

$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\,dx}_{} + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ variabile di int. muta

↳ $t = -x \Rightarrow \displaystyle = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$

$\displaystyle = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$ → 0 se f dispari; → $\displaystyle 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ se f pari

ii) e iii) → integrali nulli come per il punto i)

iv) $$\int_0^6 [\text{sen}(x-3)]^7\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{-3}^3 [\text{sen}\,t]^7\,dt = 0$$

$t = x-3 \to$
$dt = dx$
$x = 0 \to t = -3$
$x = 6 \to t = 3$

$f(t) = (\text{sen}\,t)^7$ dispari e intervallo simm.

Es. 3

i) $$\int_0^\pi x^2 \,\text{sen}\,x\,dx = \int_0^\pi x^2 \frac{d}{dx}(-\cos x)\,dx = -\int_0^\pi \frac{d}{dx}(x^2)\cdot(-\cos x)\,dx + \left[x^2\cdot(-\cos x)\right]_0^\pi$$

formula per parti: scarichiamo la derivata da una funzione all'altra cambiando segno (+ un pezzo da non integrare)

ancora per parti

$$= \left[-x^2\cos x\right]_0^\pi + 2\int_0^\pi x\cos x\,dx = \left(-\pi^2\cos\pi + 0\right) + 2\int_0^\pi x \frac{d}{dx}(\text{sen}\,x)\,dx =$$

$$= \pi^2 + 2\left[-\int_0^\pi \frac{d}{dx}(x)\,\text{sen}\,x\,dx + \left[x\,\text{sen}\,x\right]_0^\pi\right]$$

$$= \pi^2 - 2\int_0^\pi \text{sen}\,x\,dx = \pi^2 + 2\left[\cos x\right]_0^\pi = \pi^2 - 4$$

ii) $$\int_1^2 x^2 \log x\,dx = \int_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right)\cdot\log x\,dx = -\int_1^2 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{d}{dx}(\log x)\,dx + \left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,dx + \frac{8}{3}\log 2 = -\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \frac{8}{3}\log 2 = -\frac{1}{9}(8-1) + \frac{8}{3}\log 2$$

$$= -\frac{7}{9} + \frac{8}{3}\log 2$$

iii) $\int e^x \cos x \, dx = \int \frac{d}{dx}(e^x) \cos x \, dx = -\int e^x \frac{d}{dx}(\cos x)\, dx + e^x \cos x + c$

$= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx + c = e^x \cos x + \int \frac{d}{dx}(e^x) \operatorname{sen} x \, dx + c$

$= e^x \cos x - \int e^x \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)\, dx + e^x \operatorname{sen} x + c = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) - \int e^x \cos x \, dx + c$

Ciò scritto può essere visto come una semplice equazione dove l'incognita è $\int e^x \cos x \, dx$:

$\int e^x \cos x \, dx = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + c - \int e^x \cos x \, dx$

Definisco $F(x) = \int e^x \cos x \, dx$

$\Rightarrow F(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + c - F(x)$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\left(e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + c\right) \Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + c$

iv) $\int_{-2}^{2} x^3 |1-x| \, dx$

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{per } x \leq 1 \\ x-1 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{2} x^3 |1-x| \, dx = \int_{-2}^{1} x^3(1-x)\, dx + \int_{1}^{2} x^3(x-1)\, dx = \int_{-2}^{1}(x^3-x^4)\, dx - \int_{1}^{2}(x^3-x^4)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_{1}^{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \left(\frac{2^4}{4} + \frac{2^5}{5}\right) - \left[\frac{2^4}{4} - \frac{2^5}{5} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - 4 - \cancel{\frac{2^5}{5}} - 4 + \cancel{\frac{2^5}{5}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} - 8 = \frac{5-4-80}{10} = -\frac{79}{10}$$

v) $\int_{-1}^{2} x\,|1-e^{2x}|\,dx$

$e^{2x} \leq 1 \to x \leq 0$

$$|1-e^{2x}| = \begin{cases} 1-e^{2x} & \text{se } 1-e^{2x} \geq 0 \\ e^{2x}-1 & \text{se } 1-e^{2x} < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-e^{2x} & \text{se } x \leq 0 \\ e^{2x}-1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{2} x\,|1-e^{2x}|\,dx = \int_{-1}^{0} x(1-e^{2x})\,dx + \int_{0}^{2} x(e^{2x}-1)\,dx = \int_{-1}^{0} x(1-e^{2x})\,dx - \int_{0}^{2} x(1-e^{2x})\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} x\,dx - \int_{-1}^{0} x e^{2x}\,dx - \int_{0}^{2} x\,dx + \int_{0}^{2} x e^{2x}\,dx$$

Calcoliamo per parti:

$$\int x e^{2x}\,dx = \int x \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)dx = -\int \frac{d}{dx}(x)\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx + \frac{x}{2}e^{2x}$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx + \frac{x}{2}e^{2x} = -\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{x}{2}e^{2x} + c = \frac{e^{2x}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) + c$$

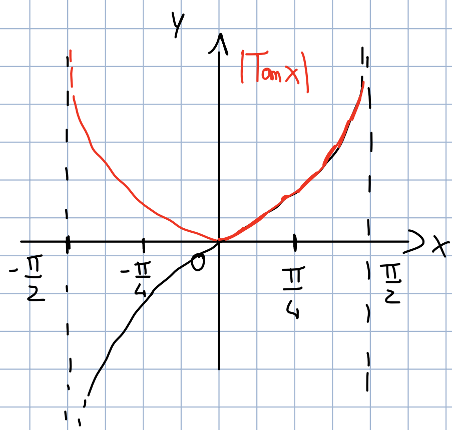
$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} x\,|1-e^{2x}|\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} + \left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]_{0}^{2}$$

$$= -\cancel{\frac{1}{2}} - \left(-\cancel{\frac{1}{4}} + \frac{3}{4}e^{-2}\right) - 2 + \frac{3}{4}e^{4} + \cancel{\frac{1}{4}} = -2 + \frac{3}{4}\left(e^{4} - e^{-2}\right)$$

vi) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\tan x|\,dx$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} |\tan x|\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$$

per simmetria ($|\tan x|$ è pari)



proprietà log

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -2\left[\log|\cos x|\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -2\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2} - \log 1\right) = -2\log\frac{\sqrt{2}}{2} = \log 2$$

Es. 4

$$f(x) = x \log(x^2+4) + 4 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 4x$$

i) $x^2+4>0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies \underline{\text{dom} f = \mathbb{R}}$

Anche se richiesto al punto viii), notiamo subito che $f(0)=0$ e

$$f(-x) = -x \log((-x)^2+4) + 4 \arctan\left(\frac{-x}{2}\right) + 4x$$
$$= -x \log(x^2+4) - 4 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + 4x = -f(x)$$

$\implies$ $\underline{f \text{ è dispari}}$, ovvero $\underline{\text{simm. rispetto l'origine}}$

↳ notarlo ci permette di saltare qualche conto, o di avere delle verifiche sulla correttezza di quanto stiamo facendo

ii) $\underline{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$, $\underline{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$

$\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$, $\underline{\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$ (per simmetria)

iii) $\underline{\text{Non ci sono asintoti}}$

iv) $$f'(x) = \log(x^2+4) + \frac{2x^2}{x^2+4} + \cancel{4}^{\,2} \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} - 4$$

$$= \log(x^2+4) + \frac{2x^2}{x^2+4} + \frac{8}{x^2+4} - 4 = \log(x^2+4) + \frac{2\cancel{(x^2+4)}}{\cancel{x^2+4}} - 4$$

$$= \log(x^2+4) - 2 \longrightarrow \text{ben definita } \forall x \in \text{dom} f$$

$\underline{f'(x) \geq 0} \iff \log(x^2+4) \geq 2 \iff x^2+4 \geq e^2 \iff x^2 \geq e^2-4$

$\iff \underline{x \leq -\sqrt{e^2-4} \ \text{ o } \ x \geq \sqrt{e^2-4}}$ ($\underline{\text{N.B.}}$ $e>2 \implies e^2>4 \implies e^2-4>0$)

v) f crescente per $x < -\sqrt{e^2-4}$ o $x > \sqrt{e^2-4}$

f decrescente per $-\sqrt{e^2-4} < x < +\sqrt{e^2-4}$

$x = -\sqrt{e^2-4}$ max. locale , $x = \sqrt{e^2-4}$ min. locale . $\nexists$ max./min. globali

(N.B. quanto visto finora è in linea con la disparità di f)

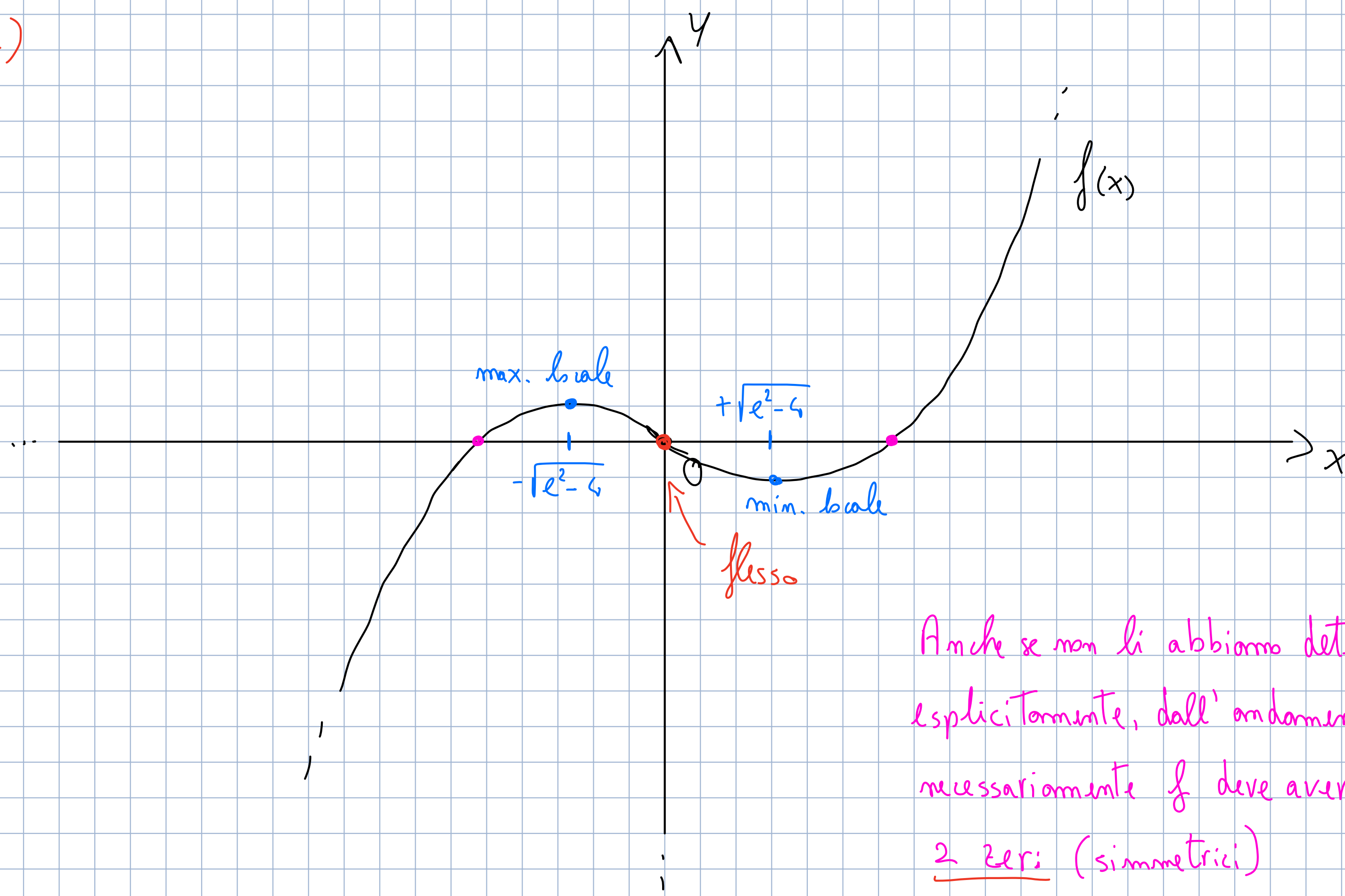
vi) $f''(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$ $\longrightarrow$ ben definita $\forall x \in \operatorname{dom} f$

$f''(x) \geq 0$ per $x \geq 0$

vii) f convessa per $x > 0$, f concava per $x < 0$, f ha un flesso per $x = 0$

viii) Abbiamo visto che $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ f dispari (dobbiamo mostrarlo nel grafico!)

ix)



Anche se non li abbiamo determinati esplicitamente, dall'andamento necessariamente f deve avere 2 zeri (simmetrici)

Es. 5

i) $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x+2x^2}=-\frac{1}{2}$$

ii) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{x}$$

Notiamo prima che $$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\log x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\log x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}}\overset{H}{=}e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}}}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\log x}-1}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\log x}(\log x-1)}{1}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\boxed{x^x}}_{\to 1}\underbrace{(\log x-1)}_{\to -\infty}=-\infty$$

iii) $$\lim_{x\to -\infty}x\log\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{\log\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{-\cancel{\frac{1}{x^2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\operatorname{sen}\frac{1}{x}}}{-\cancel{\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{1+0}=1$$

iv) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\operatorname{Tan}x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{x\operatorname{sen}x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^2\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\overset{\to 1}{\boxed{\frac{x}{\operatorname{sen}x}}}\cdot\overset{\to ?}{\boxed{\frac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^3}}}$$

Concentriamoci su: $$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^3}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos x}-\cancel{x}\operatorname{sen}x-\cancel{\cos x}}{3x^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)=-\frac{1}{3}$$

Dunque $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\operatorname{Tan}x}-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{3}$$

v) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(2^{\frac{1}{x}}\right)}{\frac{d}{dx}\left(2^{\frac{1}{x}}\right)}=1$$

vi) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{3}$$ (no forma ind.)

vii) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}x}{x+\sqrt{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}=0$$

viii) $$\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen}x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\log(\operatorname{sen}x+\cos x)}{x}}\overset{H}{=}e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x+\cos x}}=e$$