Tutorato Analisi Matematica 1 - 2025/2026

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 12 - Calcolo di integrali, limiti e studi di funzione - 15/12/2025

ESERCIZI

Es. 1 (17/06/2024)

Si studi la funzione $f(x) = \dfrac{x e^x}{x-1}$

(per analizzare il segno della derivata seconda, sarà bene studiare separatamente $g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 4$)

Es. 2 (21/02/2023 A)

i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cosh(\sqrt{|x|})}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}}$

ii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{3x}\right) \log(x^x + 1) \tan\left(\frac{1}{\log x}\right)$

Es. 3 (qualche razionale semplice) $\longrightarrow$ guardare esercizi svolti su integrali su Moodle per molti altri!

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - x^2}\, dx$

ii) $\displaystyle\int \frac{1}{4 + x^2}\, dx$

iii) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x + 1}\, dx$

Es. 4 (l'Hopital)

i) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{x - 1}\, dt$

ii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\, dt}{\sqrt{x}\; e^x}$

iii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}(x^2)} \int_{4x^2}^{9x^2} (1 + \cos(\sqrt{t}))\, dt$

Es. 5 (altri integrali)

i) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

ii) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{e^x - 1}\, dx$

iii) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x \operatorname{sen}(\cos x) \operatorname{sen} x\, dx$

iv) $\displaystyle\int_0^\pi \cosh(\operatorname{sen} x) \cos x \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx$

Es. 1

$$f(x) = \frac{x e^x}{x-1}$$

i) Dominio

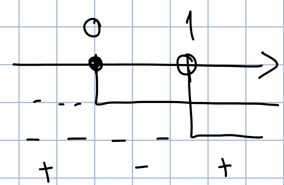
$x \neq 1 \implies \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

ii) Segno / inters.

$$f(x) \geq 0 \iff \frac{x e^x}{x-1} \geq 0$$

$N: \; x e^x \geq 0 \iff x \geq 0$

$D: \; x > 1$



$f(x) > 0$ se $x < 0$ o $x > 1$

$f(x) < 0$ se $0 < x < 1$

$f(x) = 0$ se $x = 0$

iii) Limiti / asintoti

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x e^x}{x-1} = ?$

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x e^x$ è forma ind $[-\infty \cdot 0]$ che si può risolvere con l'Hôp.

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0 \implies \lim_{x \to -\infty} \frac{x e^x}{x-1} = 0 \implies y = 0 \text{ as. orizz. a } -\infty.$$

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x e^x}{x-1} = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = +\infty$

- $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \implies x = 1$ as. verticale

f non ha max. / min. globali

iv) Derivata prima

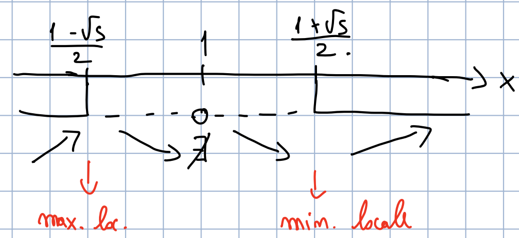
$$f'(x) = \frac{[e^x + xe^x](x-1) - xe^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x}{(x-1)^2}(x^2 - x - 1)$$

Se $x \neq 1 \to f'(x) \geq 0$ se $x^2 - x - 1 \geq 0$

$\hookrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ o $x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

f crescente per $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ o $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

f decrescente per $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 1$ o $1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



f ha max. locale in $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e min locale in $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

v) Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{(x-1)^{\cancel{2}}\left[e^x(x^2-x-1) + e^x(2x-1)\right] - 2\cancel{(x-1)}\, e^x(x^2-x-1)}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{e^x}{(x-1)^3}\left[(x-1)(x^2+x-2) - 2x^2 + 2x + 2\right] = \frac{e^x}{(x-1)^3}\left(x^3 + \cancel{x^2} - \cancel{2x} - \cancel{x^2} - x + 2 - 2x^2 + \cancel{2x} + 2\right)$$

$$= \frac{e^x}{(x-1)^3}(x^3 - 2x^2 - x + 4)$$

Come suggerito dal testo per studiare il segno di f'' serve studiare il segno di

$g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 4$, che però non può essere determinato analiticamente a meno di usare esplicitamente formule risolutive per eq. di 3° grado (non chieste all'esame).

Studiando limiti e derivata prima di g possiamo però ottenere informazioni in più.

- dom $g = \mathbb{R}$

- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ $\Rightarrow$ per il Teorema di esistenza degli zeri
$\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R} : g(\bar{x}) = 0$ (ne esiste almeno uno!)
ma potrebbero esserci 1, 2, o 3 zeri di g.

(notiamo anche che $g(0) = 4 > 0$, $g(1) = 2 > 0$
$g(-1) = 2 > 0$ $\longrightarrow$ uno zero $\bar{x}$ è sicuramente < -1.)

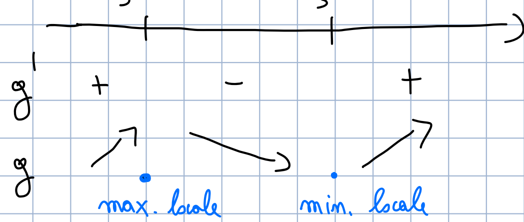
- $g'(x) = 3x^2 - 4x - 1$

$g'(x) \geq 0 \iff 3x^2 - 4x - 1 \geq 0$

$\hookrightarrow x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+3}}{3} = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

$-1 < x_1 < 0$ $\quad$ $1 < x_2 < 2$

$x_1 = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$ $\quad$ $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$



È importante valutare il segno di $g(x_1)$ e $g(x_2)$ per capire il numero di zeri di g:

$$g(x_1) = \left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right) + 4$$

$$= \frac{8 - 7\sqrt{7} + 3\cdot 2\cdot 7 - 3\cdot 4\cdot\sqrt{7}}{27} - 2\cdot\frac{4+7-4\sqrt{7}}{9} - \frac{2-\sqrt{7}}{3} + 4$$

$$= \frac{50 - 19\sqrt{7} - 18(11 - 4\sqrt{7}) - 9(2-\sqrt{7}) + 108}{27} = \frac{50 - 19\sqrt{7} - 198 + 72\sqrt{7} - 18 + 9\sqrt{7} + 108}{27}$$

$$= \frac{-58 + 62\sqrt{7}}{27} > 0$$

(se si riesce a dire se >0 o <0 senza fare tutto il conto va bene)

$$g(x_2) = \left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right) + 4 =$$

$$= \frac{8 + 7\sqrt{7} + 3\cdot 2\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot\sqrt{7}}{27} - 2\cdot\frac{4+7+4\sqrt{7}}{9} - \frac{2+\sqrt{7}}{3} + 4$$

$$= \frac{50 + 19\sqrt{7} - 6(11 + 4\sqrt{7}) - 9(2+\sqrt{7}) + 108}{27} = \frac{158 + 19\sqrt{7} - 66 - 24\sqrt{7} - 18 - 9\sqrt{7}}{27}$$

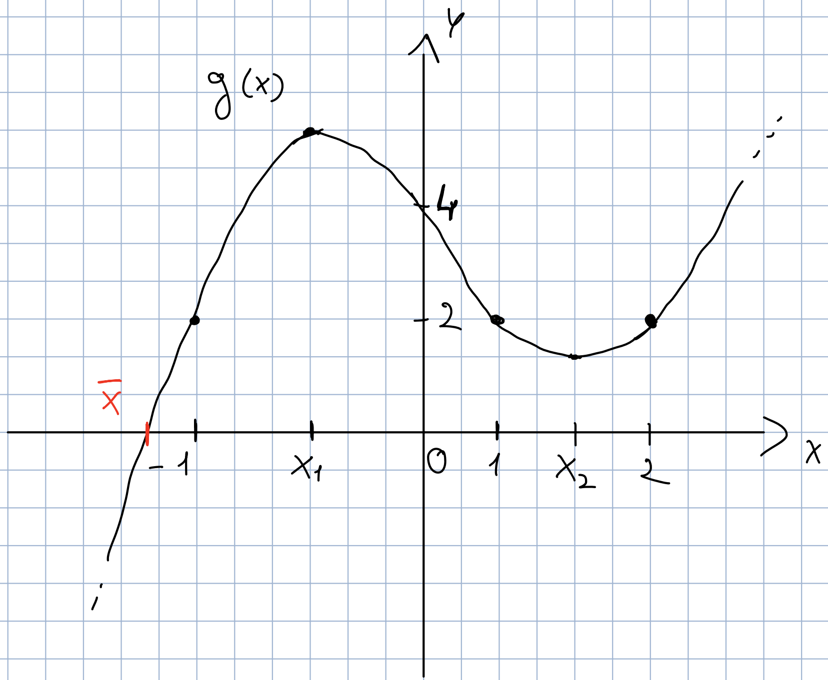
$$= \frac{74 - 14\sqrt{7}}{27}$$

Notiamo che: $\quad 7 < 9 \Rightarrow \sqrt{7} < 3 \Rightarrow 14\sqrt{7} < 42$

$\Rightarrow -42 < -14\sqrt{7} \quad \Rightarrow 74 - 42 < 74 - 14\sqrt{7}$

$\Rightarrow 0 < 32 < 74 - 14\sqrt{7} \quad \Rightarrow g(x_2) > 0$

- Siamo quindi in grado di tracciare un grafico qualitativo di g:



$\Rightarrow \exists! \, \bar{x} < -1$ tale che $g(\bar{x}) = 0$

$g(x) < 0$ se $x < \bar{x}$

$g(x) > 0$ se $x > \bar{x}$

[si poteva dedurre facilmente che $g(x_1) > 0$ senza fare il conto, ma che fosse anche $g(x_2) > 0$ non so...]

Torniamo al punto v) dello studio di f:

$$f''(x) = \frac{e^x}{(x-1)^3}\left(x^3 - 2x^2 - x + 4\right)$$

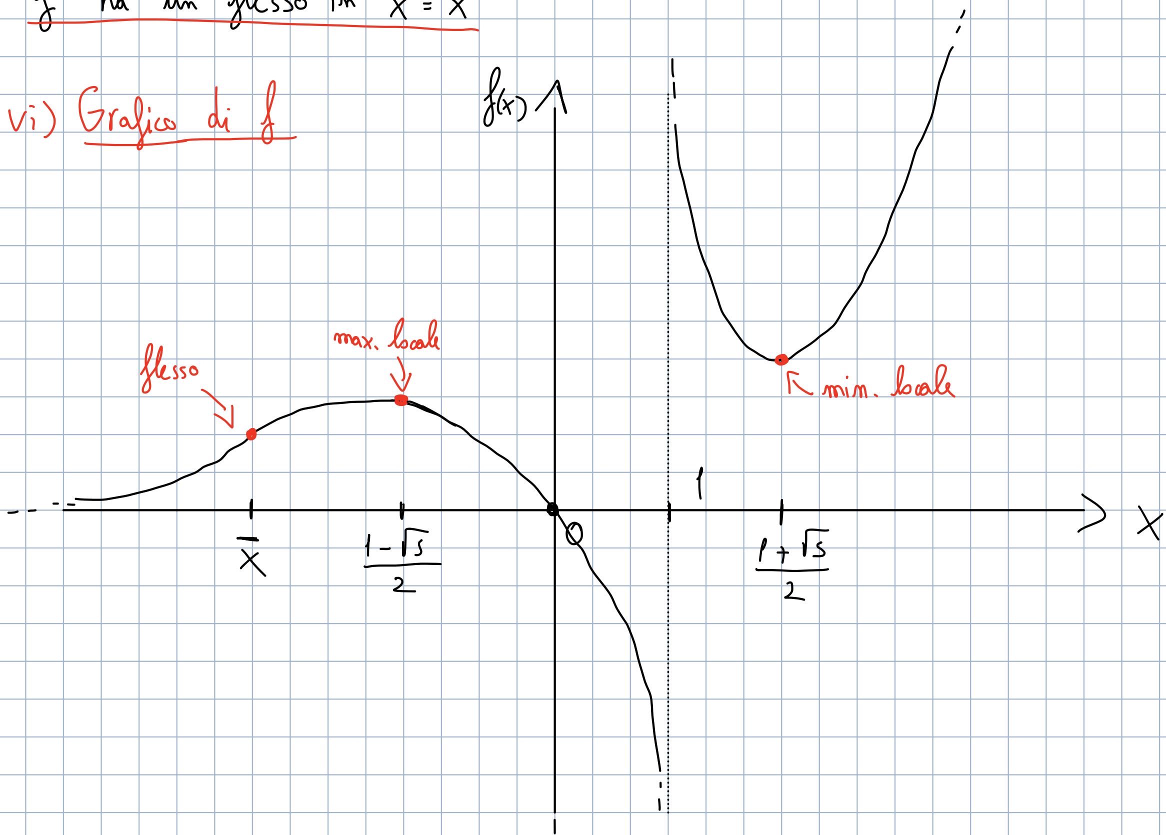
		$\bar{x}$		1	
f''	+		−	∄	+
f	∪		∩	∄	∪

f convessa per $x < \bar{x}$ o $x > 1$

f concava per $\bar{x} < x < 1$

f ha un flesso in $x = \bar{x}$

vi) Grafico di f



Es. 2

i) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh(\sqrt{|x|})}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}}$$

$t = -x \to t^2 = x^2$

Notiamo che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cosh(\sqrt{x})}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cosh(\sqrt{-x})}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cosh(\sqrt{t})}{\sqrt{\operatorname{sen}(t^2)}}$

dunque limite destro e sinistro, se esistono, coincidono.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cosh(\sqrt{x})}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cosh(\sqrt{x})}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2)}} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\left[\frac{1-\cosh(\sqrt{x})}{x}\right]}_{\text{sostituendo } t=\sqrt{x} \text{ si vede che } \to -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left[\sqrt{\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}}\right]}_{\text{sost. } t=x^2 \text{ si vede che } \to \sqrt{1}=1} = -\frac{1}{2}$$

ii) $$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{3x}\right) \log(x^x+1) \operatorname{Tan}\left(\frac{1}{\log x}\right) \longrightarrow \text{forma ind. } [0\cdot\infty]$$

$$\log(x^x+1) = \log\left[x^x\left(1+\frac{1}{x^x}\right)\right] = \log(x^x) + \log\left(1+\frac{1}{x^x}\right) = x\log x + \log\left(1+\frac{1}{x^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left[\operatorname{senh}\left(\frac{1}{3x}\right)\cdot x\log x \cdot \operatorname{Tan}\left(\frac{1}{\log x}\right) + \underbrace{\underbrace{\operatorname{senh}\left(\frac{1}{3x}\right)}_{\to 0}\cdot \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{x^x}\right)}_{\to 0}\cdot \underbrace{\operatorname{Tan}\left(\frac{1}{\log x}\right)}_{\to 0}}_{\to 0}\right]$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{3x}\right)\cdot x\log x \cdot \operatorname{Tan}\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{1}{3x}\right)}{\frac{1}{3x}} \cdot \left(\frac{1}{3\cancel{x}}\right)\cdot \cancel{x}\log x \cdot \operatorname{Tan}\left(\frac{1}{\log x}\right) = \frac{1}{3}\lim_{x\to +\infty} \boxed{\frac{\operatorname{senh}\left(\frac{1}{3x}\right)}{\frac{1}{3x}}}_{①} \cdot \boxed{\frac{\operatorname{Tan}\left(\frac{1}{\log x}\right)}{\frac{1}{\log x}}}_{②} = \frac{1}{3}$$

① $\displaystyle = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{senh}(t)}{t} = 1$

$t = \frac{1}{x}$, se $x \to +\infty$ allora $t \to 0$

② $\displaystyle = \lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} = 1$

$t = \frac{1}{\log x}$, se $x \to +\infty$ allora $t \to 0$

Es. 3 (qualche razionale semplice)

i) $\int \frac{1}{x^3 - x^2} \, dx$

Decomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{(A+C)x^2 + (-A+B)x - B}{x^2(x-1)}$$

$\Rightarrow$ uguagliando i termini abbiamo $\begin{cases} B = -1 \\ A = B = -1 \\ C = -A = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^3 - x^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$

da cui

$$\int \frac{1}{x^3 - x^2} \, dx = -\int \frac{1}{x} \, dx - \int \frac{1}{x^2} \, dx + \int \frac{1}{x-1} \, dx = -\log|x| + \frac{1}{x} + \log|x-1| + c$$

ii) $\int \frac{1}{4 + x^2} \, dx = \int \frac{1}{4\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \, dx \underset{t = \frac{x}{2}, \; dt = \frac{dx}{2}}{=}$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + t^2} \, dt = \frac{1}{2} \arctan t + c = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

iii) $\int \frac{x^2 + 1}{x + 1} \, dx \longrightarrow$ qua il grado del polinomio al num. è $\geq$ di quello al denom., quindi effettuiamo la divisione, ovvero:

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} = Ax + B + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax^2 + Ax + Bx + B + C}{x+1} = \frac{Ax^2 + (A+B)x + B + C}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx = \int \left(x-1+\frac{2}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - x + 2\log|x+1| + c$$

Es. 4 (l' Hopital)

i) $$\lim_{x\to 1} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{x-1}\,dt = \lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x e^{t^2}\,dt}{x-1} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

In generale abbiamo:

$$F(x) = \int f(x)\,dx \qquad \text{che soddisfa } F'(x) = f(x)$$

e anche

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dunque detta F una primitiva di e^{t^2} $\to$ $F(t) = \int e^{t^2}\,dt$, $F'(t) = e^{t^2}$

possiamo scrivere l'integrale definito

$$\int_1^x e^{t^2}\,dt = F(x) - F(1) \Rightarrow \frac{d}{dx}\int_1^x e^{t^2}\,dt = \frac{d}{dx}\left(F(x) - F(1)\right) = F'(x) = e^{x^2}$$

Dunque applichiamo l'Hopital per risolvere il limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x e^{t^2}\,dt}{x-1} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}\int_1^x e^{t^2}\,dt}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2}}{1} = e$$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt}{\sqrt{x}\;e^x}$

derivata composta!

$$F(t) = \int e^{t^2}\,dt \Rightarrow \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt = F(\sqrt{x}) - F(0) \Rightarrow \frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt = \frac{d}{dx}\left(F(\sqrt{x})\right) = F'(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$F'(t) = e^{t^2}$

$$= e^{(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^x}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt}{\sqrt{x}\;e^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{2\sqrt{x}}}{\frac{e^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{\cancel{2\sqrt{x}}}}{\frac{e^x + 2x e^x}{\cancel{2\sqrt{x}}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}}{x\cancel{e^x}\left(2+\frac{1}{x}\right)} = \underline{0}$$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x^2)} \displaystyle\int_{4x^2}^{9x^2} \left(1+\cos(\sqrt{t})\right)dt$

$$F(t) = \int \left(1+\cos\sqrt{t}\right)dt \qquad \Big| \Rightarrow \int_{4x^2}^{9x^2}\left(1+\cos(\sqrt{t})\right) = F(9x^2) - F(4x^2)$$

$$F'(t) = 1+\cos\sqrt{t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\int_{4x^2}^{9x^2}\left(1+\cos\sqrt{t}\right)dt = F'(9x^2)\cdot 18x - F'(4x^2)\cdot 8x$$

$$= \left(1+\cos\left(\sqrt{9x^2}\right)\right)\cdot 18x - \left(1+\cos\left(\sqrt{4x^2}\right)\right)\cdot 8x$$

$$= 2x\left[9\left(1+\cos(3|x|)\right) - 4\left(1+\cos(2|x|)\right)\right]$$

$$= 2x\left[5 + 9\cos(3|x|) - 4\cos(2|x|)\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}(x^2)} \int_{4x^2}^{9x^2} (1+\cos(\sqrt{t}))\,dt \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x}\left[5+9\cos(3|x|)-4\cos(2|x|)\right]}{\cancel{2x}\cos(x^2)} = \underline{10}$$

Es. 5

i) $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$ $\longrightarrow$ un metodo veloce per calcolarlo è sfruttare la formula di bisezione:

$\nearrow$ si può fare anche parti

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right)dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + c$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{4} + c = \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{sen}x\cos x\right) + c$$

ii) $\int_0^1 \sqrt{e^x-1}\,dx$

Poniamo $t = \sqrt{e^x-1}$, $dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx = \frac{t^2+1}{2t}dx \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2+1}dt$

$\downarrow$

$t^2+1 = e^x$

Gli estremi diventano: $x=0 \to t = \sqrt{e^0-1} = 0$

$x = 1 \to t = \sqrt{e^1-1} = \sqrt{e-1}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{e^x-1}\,dx = \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{e-1}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$= 2\Big[t - \arctan(t)\Big]_0^{\sqrt{e-1}} = 2\left(\sqrt{e-1} - \arctan\sqrt{e-1} - 0 + \arctan 0\right) = 2\left(\sqrt{e-1} - \arctan\sqrt{e-1}\right)$$

iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x \; \text{sen}(\cos x)\, \text{sen}\, x \, dx$

Proviamo con $t = \cos x \rightarrow dt = -\text{sen}\, x \, dx \Rightarrow \text{sen}\, x \, dx = -dt$

$x = 0 \rightarrow t = \cos 0 = 1 \quad ; \quad x = \pi \rightarrow t = \cos \pi = -1$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \; \text{sen}(\cos x)\, \text{sen}\, x \, dx = -\int_{-1}^{1} t^2 \, \text{sen}\, t \, dt = 0$$

oppure per parti impiegando qualche minuto in più...

$\hookrightarrow f(t) = t^2 \text{sen}\, t$ dispari e intervallo simmetrico!

N.B.1 La sostituzione $t = \cos x$ può essere effettuata perché $\cos x$ è invertibile nell'intervallo di integrazione $[0, \pi]$. Se l'intervallo fosse stato $[0, 2\pi]$ la sostituzione non poteva essere fatta! (si veda prox. esercizio)

N.B.2 Si può vedere che l'integrale è nullo subito per simmetria sfruttando le relazioni tra seno e coseno:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \qquad , \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{sen}\, \alpha$$

Pongo $t = x - \frac{\pi}{2}$, $dt = dx$, $x = \pi \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$, $x = 0 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \; \text{sen}(\cos x)\, \text{sen}\, x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \text{sen}\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) \text{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 t \; \text{sen}(\text{sen}\, t) \cos t \, dt = 0$$

per simmetria (integranda dispari)

iv) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cosh(\operatorname{sen} x) \cos x \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx$

• Metodo 1

Come nell'es. precedente possiamo porre $t = x - \frac{\pi}{2}$

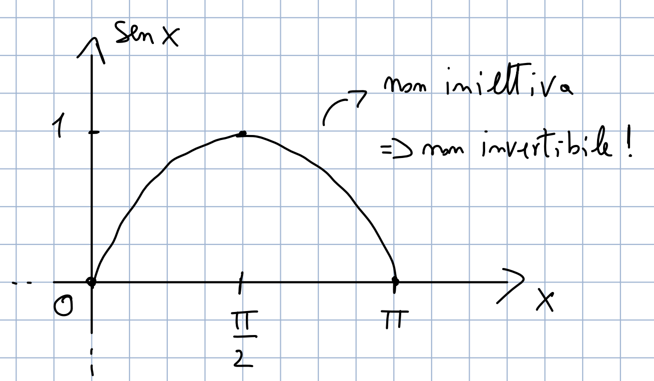
$$\int_0^{\pi} \cosh(\operatorname{sen} x) \cos x \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cosh\left(\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}\, dt$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cosh(\cos t) \operatorname{sen} t \sqrt{\cos t}\, dt = 0$$ per simmetria (integranda dispari)

• Metodo 2 (più lungo, solo se non accorgiamo della simmetria...)

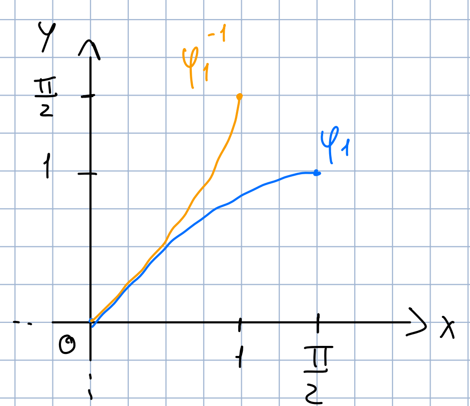
Sarebbe naturale porre $t = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, ma la funzione $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$ non è invertibile in $[0, \pi]$. Sono però invertibili le funzioni

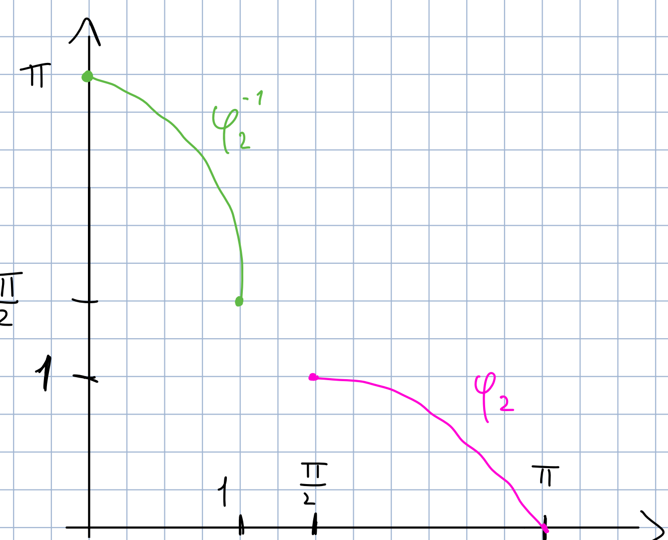
$$\begin{cases} \varphi_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1], & \varphi_1(x) = \operatorname{sen} x \\ \varphi_2 : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to [0,1], & \varphi_2(x) = \operatorname{sen} x \end{cases}$$



con inverse

$$\begin{cases} \varphi_1^{-1} : [0,1] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right], & \varphi_1^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x \\ \varphi_2^{-1} : [0,1] \to \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], & \varphi_2^{-1}(x) = -\operatorname{arcsen} x + \pi \end{cases}$$





Perché $\varphi_2^{-1}(x) = -\arcsin(x) + \pi$? È la funzione che otteniamo invertendo $\operatorname{sen} x$ ristretta all'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ invece che ristretta all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

↳ verificare graficamente ribaltando $\operatorname{sen} x$ rispetto la bisettrice $y = x$!

Per calcolare l'integrale serve solo riconoscere che dobbiamo spezzarlo in 2 sottointervalli, senza scrivere/riconoscere $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$ ... → in questo caso! In generale serve...

↓

$$\int_0^{\pi} f(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\, dx \qquad \text{con } f(x) = \cosh(\operatorname{sen} x) \cos x \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

Pongo $t = \sqrt{\varphi_1(x)} = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, $dt = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx \Rightarrow \cos x\, dx = 2t\, dt$ → in questo caso non serve invertire esplicitamente x in funzione di t

$x = 0 \to t = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \to t = 1$, $x = \pi \to t = 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \cosh(\operatorname{sen} x) \cos x \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx = \int_0^1 \cosh(t^2) \cdot 2t^2\, dt + \int_1^0 \cosh(t^2) \cdot 2t^2\, dt$$

$$= \int_0^1 \cosh(t^2)\, 2t^2\, dt - \int_0^1 \cosh(t^2) \cdot 2t^2\, dt = 0$$

N.B.

In questo esercizio sembra non capirsi il motivo per cui abbiamo dovuto spezzare in 2 integrali, perché non è stato necessario esplicitare x in funzione di t.

Provare a risolvere

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\, dx \qquad \text{con la sostituzione } t = \operatorname{sen} x \quad \left(\text{usando } \cos(\arcsin(t)) = \sqrt{1 - t^2},\ -1 \le t \le 1\right)$$

per capirne meglio il motivo.