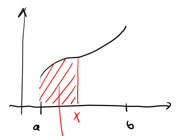
Lezione 42 - 12/12/2025

Teorema fondamentale del calcolo.

- $f \in \mathcal{R}([a,b])$

  $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

  funzione integrale.

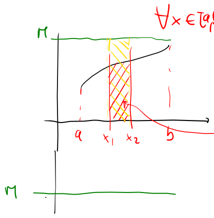


$F(x) =$ area

- F è (sempre) continua

  $\exists M > 0 : \quad |F(x_2) - F(x_1)| \le M\,|x_2 - x_1|$

  questo M viene dal fatto $\forall x \in [a,b],\ |f(x)| \le M$



$F(x_2) - F(x_1) =$ area

$M \cdot |x_1 - x_2| =$ area

(oss. $\exists C > 0 : \forall x, y \in [a,b]$, $|g(x) - g(y)| \le C\,|x - y|$, g si dice LIPSCHITZIANA

ie: Lipschitziana $\Rightarrow$ continua unif. $\Rightarrow$ continua)

Teo. fondamentale

$\boxed{f \in \mathcal{R}([a,b])}$, $x_0 \in [a,b]$, $\boxed{f \text{ è continua in } x_0}$

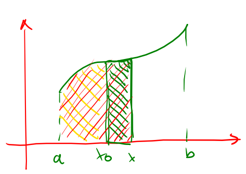
Allora $\boxed{F \text{ è derivabile in } x_0 \text{ e } F'(x_0) = f(x_0)}$

dim. (idea)

considerare il rapporto incrementale di F (funzione integrale)

e far vedere che $R^F_{x_0}(x) \xrightarrow{x \to x_0} f(x_0)$

$$R^F_{x_0}(x) = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0}$$



$F(x) =$ area

$F(x_0) =$ area

$F(x) - F(x_0) =$ area

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\text{area}}{\text{base del ``rettangoloide''}}$$

base $\to 0$ rettangoloide $\to$ "rettangolo"

di altezza $f(x_0)$

Primitive

def. sia $f : I \to \mathbb{R}$, f funzione (qualunque)

I intervallo.

Primitive

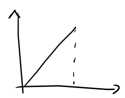
def. sia $f : I \to \mathbb{R}$, f funzione (qualunque)
I intervallo.

sia $G : I \to \mathbb{R}$, derivabile

G si dice primitiva di f se $\forall x \in I$, $G'(x) = f(x)$.

se f ha una primitiva, f la diciamo
funzione primitivabile

Es. x su $[0,1]$. $f(x) = x$



ha primitiva?
$x \longmapsto \frac{x^2}{2}$ è primitiva. $[0,1] \to \mathbb{R}$

è unica? $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ no

$\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)' = x$

no, perché se sommo una costante
trovo un'altra primitiva.

supponiamo che G_1 e G_2 siano 2 primitive
di f (attenzione: siamo sempre su I
intervallo)

$(G_1 - G_2)' = G_1' - G_2' = f - f = 0$

se G_1 e G_2 sono 2 primitive di f
allora $(G_1 - G_2)' = 0$ allora $G_1 - G_2$ è costante
(viene da Lagrange)

conclusione definita su I G
se f ha una primitiva allora
tutte le altre primitive sono
del tipo $G + \text{cost}$.

def. sia $f : I \to \mathbb{R}$, f sia primitivabile

l'unione di tutte le sue primitive si dice
integrale indefinito di f

e si indica con $\int f(x)dx$
senza estremi

$\int f(x)dx = G + \text{cost.} = \{ G(x) + c : c \in \mathbb{R} \}$

Teo (fondamentale del calcolo)
$f \in R([a,b])$ e $x_0 \in [a,b]$. detta
se f è continua in x_0 allora $F(x) = \int_a^x f(t)dt$
F è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$

Teo (fond. del calcolo)

$f \in \mathcal{R}([a,b])$ e $x_0 \in [a,b]$. detta $F(x) = \int^x f(t)\,dt$

se f è continua in x_0 allora

F è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$

Corollario sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua (su tutto $[a,b]$)

Allora f è primitivabile

e la F, funzione integrale, è una primitiva

dim. f continua $\Rightarrow$ f è in $\mathcal{R}([a,b])$ integrabile secondo Riemann

$\Rightarrow$ f è $\mathcal{R}([a,b])$ e f è continua in ogni $x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ F è derivabile in ogni $x \in [a,b]$

e $\forall x \in [a,b]$, $F'(x) = f(x)$

quindi F è una primitiva

CVD

Teorema (Torricelli o Torricelli-Barrow)

sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua

sia G una sua primitiva

allora $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$

dim. f è continua e quindi è integrabile s. Riemann

e $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, la sua funzione integrale

è una primitiva di f

se G è un'altra primitiva,

$\forall x$, $\boxed{F(x) = G(x) + c}$ con $c \in \mathbb{R}$ costante

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) = 0$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = F(b) - F(a) = (G(b)+c) - (G(a)+c) = G(b) - G(a)$$

CVD

Conclusione: calcolare $\int_a^b f(t)\,dt$

diventa

trova una primitiva di f

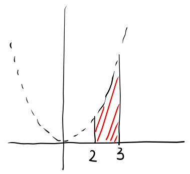
e fa la differenza tra i valori in b e a.

f	f'
c	0
x^n	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	x^n
$\log x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$-\cos x$	$+\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$1+\operatorname{tg}^2 x$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

f	una sua primitiva
0	$c \quad (c \in \mathbb{R})$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (n \neq -1)$
$x = \frac{1}{x}$	$\log x$
e^x	e^x
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$1+\operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{tg} x \leftarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x \leftarrow]-1, 1[$

attenzione al dominio (deve essere un intervallo)

Es. $\int_2^3 x^2 dx$



cerco una primitiva di x^2

tutte le primitive $\rightarrow \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

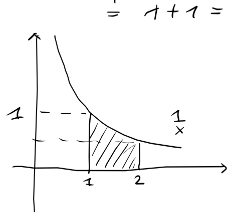
$$\int_2^3 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big]_2^3 = \frac{1}{3}x^3\Big|_{x=3} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{x=2} = \frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{1}{3}\cdot 8 = 9 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

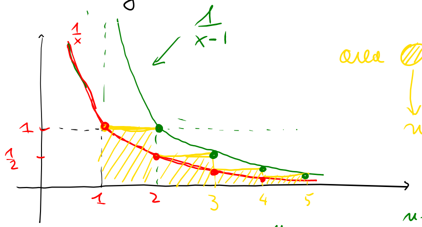
es. $\int_0^\pi (\cos x + \operatorname{sen} x)\, dx$

$$\int (\cos x + \operatorname{sen} x) dx = \int \cos x\, dx + \int \operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{sen} x - \cos x + c$$

$$\int_0^\pi (\cos x + \operatorname{sen} x)\, dx = \operatorname{sen} x - \cos x \Big|_0^\pi = (\operatorname{sen}\pi - \cos\pi) - (\operatorname{sen}(0) - \cos(0)) = (0 - (-1)) - (0 - 1) = 1 + 1 = 2$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_1^2 = \log 2$$

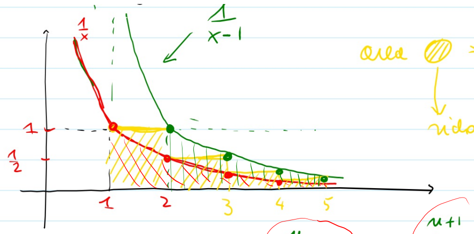




area = $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

ridotta di $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

Si ha che $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\, dt$



area = $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

ridotte di $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

Si ha che $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}}_{\text{area da 1 a } n+1} \geq \underbrace{\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt}_{\text{area}} = \log x \Big|_1^{n+1} = \log (n+1)$

$$\underbrace{1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}}_{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}} \leq \int_2^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \underbrace{\log (n+1) - \log 2}_{+1}$$

Abbiamo

$$\log (n+1) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq \log(n+1) \underbrace{- \log 2 + 1}_{\text{cost.}}$$

$\log(n+1) \geq 10$

$n+1 \geq e^{10}$

$e^2 \sim 10$

$e^{10} \sim 10{,}000$

$$\boxed{\log(n+1) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq \log(n+1) + \text{cost.}}$$

ES.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x \log x} = -\infty$$

$\lim_{x \to 0^+} x \log x$ (0, $-\infty$) $= \lim_{x \to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{tg} x}{\log (x + \frac{\pi}{2})} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log (e^x + 1)}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2}{1 - 3x^4} \log (e^{x^2} + 1) \sim x^2 = -\frac{1}{3}$$

$\log (e^{x^2} + 1) \sim \log e^{x^2} \sim x^2$

$\log(1 + f(x)) \sim f(x)$, $f(x) \to 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log (e^x + 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log \left(e^x (1 + \frac{1}{e^x})\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\log (e^x) + \log (1 + \frac{1}{e^x})}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \log (1 + \frac{1}{e^x})}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{\log (1 + \frac{1}{e^x})}{x} = 1$$

$\log(1+\frac{1}{e^x}) \to 0$, $x \to +\infty$, $\to 0$

$$\overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x + 1} e^x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 1$$