

# Physics Education Laboratory Lecture 22

Content Knowledge for Optics  
and Acoustics

Francesco Longo - 11/12/25

**Geometric optics** is when we treat light as a single beam (A ray) and study the properties. It deals with lenses, mirrors, phenomenon of total internal reflection, formation of rainbows, etc etc. In this case, the wavelike properties of light become insignificant as the objects we deal with are very huge as compared to the wavelength of light.

In **physical optics**, we consider the wave like properties of light and develop the more advanced concepts on the basis of Huygens' principle. We would deal with Young's double slit experiment and consequently with interference of light which is a characteristic of waves. We also deal with polarization and Diffraction which are also typical wavelike properties. Diffraction happens only when the obstacle's size is of the order of the wavelength of light. Maxwell's electromagnetic theory put the wave theory of light on a very firm footing. It is to be noted that reflection and refraction are explained by physical optics as well.

# Bayesian methods for metacognitive developments skills

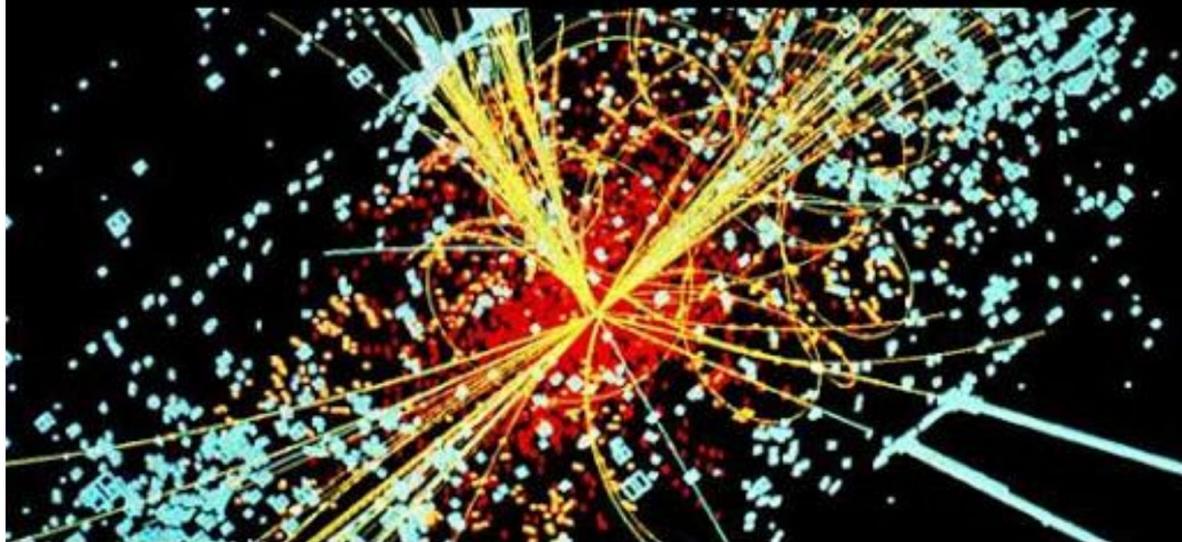
by A.Ventura et al.

<https://student.amplify.com/greeting/6931522c622c7ca5b25508bf?checkAmplifyLogin=true>

<https://student.amplify.com/greeting/6931529c412863f973445289?checkAmplifyLogin=true>

<https://student.amplify.com/greeting/693152d2065a007cfa7a198?checkAmplifyLogin=true>

## Introduzione alla Teoria della Probabilità



Dal lancio di dadi alla rivelazione di particelle  
- Teorema di Bayes-

# The Bayes theorem

Riscrivendo quanto ottenuto nella espressione precedente otteniamo:

prob delle "causa"  $H_i$ , dato l'evento  $E$

prob di avere  $E$  dato  $H_i$

prob che avvenga  $H_i$

$$P(H_i | E) = \frac{P(E | H_i) P(H_i)}{\sum_j P(E | H_j) P(H_j)}$$

Teorema di Bayes

somma su tutte le possibile "cause"  $H_1, H_2, H_3, \dots$

## 5 - Notazione e considerazioni finali:

Possiamo riscrivere il teorema di Bayes per i nostri fini operativi rinominando alcune variabili, siano:

$$R = \frac{P(E|H)}{P(E|\bar{H})} \quad C_f = P(H|E) \quad C_i = P(H)$$

ricordando che

$$P(E) = P(E|H)P(H) + P(E|\bar{H})P(\bar{H}) \quad \text{allora}$$

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|\bar{H})(1-P(H))} = \frac{P(H) \cdot \frac{P(E|H)}{P(E|\bar{H})}}{P(H) \cdot \frac{P(E|H)}{P(E|\bar{H})} + 1 - P(H)}$$

$\rightarrow P(\bar{H}) = 1 - P(H)$   
cambio notazione

$$C_f = \frac{C_i R}{C_i R + 1 - C_i}$$

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori



# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori



Quando si risolvono degli esercizi, specialmente in fisica, si tende a valutare l'esito del proprio operato in un unico modo: *Confrontando il proprio risultato numerico con quello fornito dal libro.*

Risulta immediata l'evidenza che un approccio simile NON è semplicemente ATTUABILE in un contesto "reale" scientifico, nell'ambito, ad esempio, di una ricerca.

*Quando la soluzione non è già nota in partenza, perché il territorio non è ancora ben esplorato, oppure più banalmente perché non c'è una qualche figura autorevole a fornirci l'esito esatto; come possiamo testare la validità del nostro operato?*



IF:

"SE...assumiamo la correttezza dell'ipotesi"

Nel contesto degli esercizi forniti dal libro di testo, solitamente l'ipotesi che vogliamo testare è "Il metodo risolutivo che ho utilizzato è quello corretto per questo problema". In situazioni più realistiche potrebbe essere: "la mia applicazione dei fondamentali principi della fisica è adeguata allo scenario corrente" se ad esempio si stanno facendo delle predizioni di un fenomeno di natura fisica.

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori



AND:

"E...eseguo un test in questo modo: (descrizione)"

In questo passaggio è fondamentale descrivere COME si hanno intenzione di cambiare i parametri forniti dal testo. Idealmente questi vanno cambiati con il fine di porsi in una situazione "comoda", una in cui si è sostanzialmente certi di cosa dovrebbe accadere e di come si comporterà il sistema che abbiamo in analisi.



THEN:

"ALLORA...mi aspetto questo esito"

Descriviamo accuratamente come la quantità calcolata precedentemente dovrebbe variare al mutare dei parametri nel modo che abbiamo stabilito.





THEREFORE:

"DI CONSEGUENZA...possiamo trarre questa conclusione(conferma o confutazione)"

Facciamo una riflessione finale e stabiliamo se il risultato ottenuto con il nostro esperimento mentale avvalorava o scredita in qualche modo l'ipotesi iniziale...o non vi influisce in alcun modo (esperimento inconcludente).  
distinguiamo quindi 3 casi:

- conferma: la predizione è ragionevole e consistente con il risultato.
- confutazione: la predizione NON è consistente con il risultato, nonostante la sua "ragionevolezza".
- esito nullo: la predizione NON è consistente con il risultato, ma si ritiene probabile che essa non fosse molto valida o ragionevole a causa di una conoscenza di base non sufficiente.

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori

Non è però immediato capire che valore associare al Fattore di Bayes...in questo ci viene in aiuto la scala definita da Harold Jeffreys, e qui sotto riportata.

Essa fornisce degli intervalli operativi, definiti a seconda dell'esito dell'esperimento, entro cui posizionare la propria stima soggettiva (ma razionale!) del valore R da utilizzare poi nei calcoli.

R	Interpretazione
$< \frac{1}{150}$	Confutazione molto forte
<i>tra</i> $\frac{1}{150}$ e $\frac{1}{20}$	Confutazione forte
<i>tra</i> $\frac{1}{20}$ e $\frac{1}{3}$	Sostanziale confutazione
<i>tra</i> $\frac{1}{3}$ e 1	debole confutazione
1	esito nullo
<i>tra</i> 1 e 3	debole conferma
<i>tra</i> 3 e 20	sostanziale conferma
<i>tra</i> 20 e 150	conferma importante
$> 150$	conferma molto importante

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori

## 5 - Notazione e considerazioni finali:

Possiamo riscrivere il teorema di Bayes per i nostri fini operativi rinominando alcune variabili, siano:

$$R = \frac{P(E|H)}{P(E|\bar{H})} \quad C_f = P(H|E) \quad C_i = P(H)$$

ricordando che  $P(E) = P(E|H)P(H) + P(E|\bar{H})P(\bar{H})$  allora  $P(\bar{H}) = 1 - P(H)$

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|\bar{H})(1-P(H))} = \frac{P(H) \cdot \frac{P(E|H)}{P(E|\bar{H})}}{P(H) \cdot \frac{P(E|H)}{P(E|\bar{H})} + 1 - P(H)}$$

↗ cambio quotazione ↘

$$C_f = \frac{C_i R}{C_i R + 1 - C_i}$$

$C_i$  è completamente soggettivo, mentre  $R$  lo è solo parzialmente.

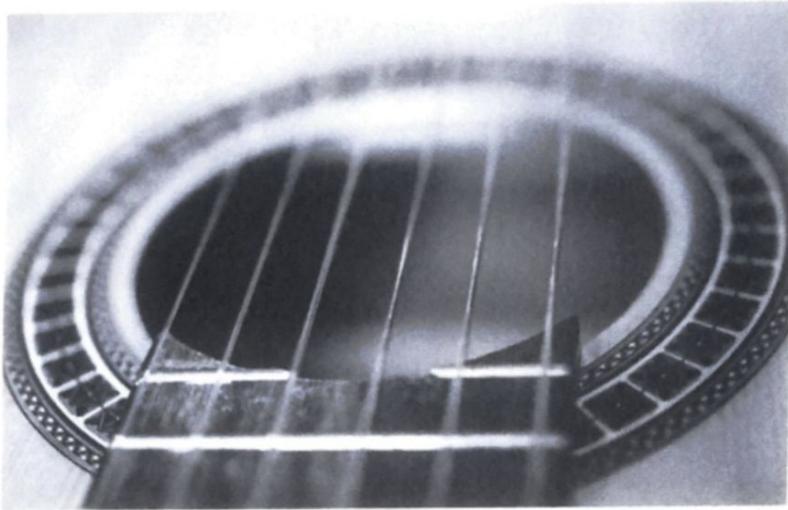
Ciò che sappiamo però è che, a seguito di numerose prove (significative, cioè non nulle...),  $C_f$  tenderà inesorabilmente al 100% o allo 0% (senza mai poter realmente raggiungere uno dei due valori però!),

ossia  $C_f$  tenderà ad una quasi certezza oggettiva al seguito di molti esperimenti.

*La scienza è quindi oggettiva a lungo termine, seppur parzialmente soggettiva nel primo periodo.*

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori

- 15 La corda di uno strumento musicale ha una densità lineare di  $2,5 \text{ g/m}$  ed è soggetta a una tensione di  $10 \text{ N}$ . Calcola la velocità e la lunghezza d'onda di un'onda armonica di frequenza  $4,4 \cdot 10^2 \text{ Hz}$  che si propaga lungo la corda.



urtroppo, la soluzione non è leggibile!  $\text{m/s}; 0,14 \text{ m}$

Vediamo ora un esempio che faccia riferimento ai vostri libri di testo:

Partiamo con lo stabilire la confidenza iniziale.

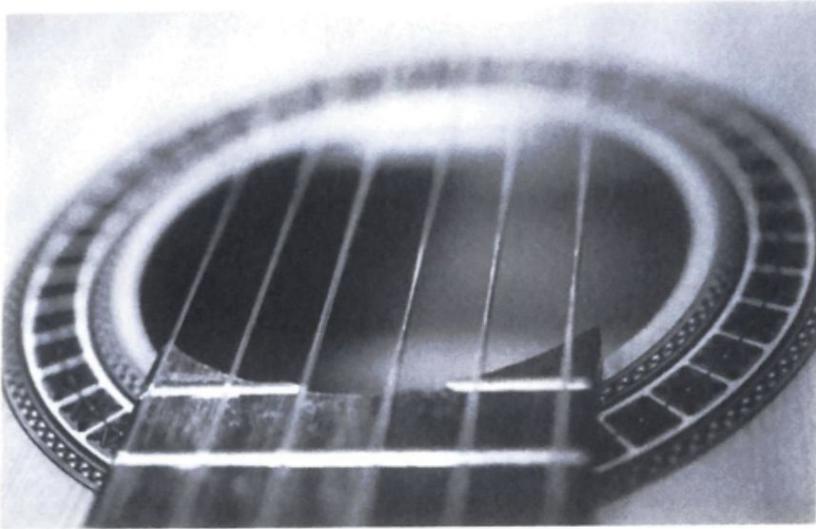
Un problema su di un'onda che si propaga su una corda, le onde sono un argomento visto da poco, non ho avuto molto tempo di esercitarmi...

$$C_i = 0.46$$

Sono quasi neutrale, tendente alla convinzione di NON saperlo risolvere.

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori

- 15 La corda di uno strumento musicale ha una densità lineare di  $2,5 \text{ g/m}$  ed è soggetta a una tensione di  $10 \text{ N}$ . Calcola la velocità e la lunghezza d'onda di un'onda armonica di frequenza  $4,4 \cdot 10^2 \text{ Hz}$  che si propaga lungo la corda.



purtroppo, la soluzione non è leggibile!  $m/s; 0,14 m$

Guardando il testo vedo che mi vengono dati:

$$\mu = 2,5 \frac{\text{g}}{\text{m}} \text{ e } T = 10\text{N}$$

ricordo che  $f \cdot \lambda = v$

quindi la prima cosa da calcolare suppongo sia  $v$ .

un po' a memoria provo:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 63 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

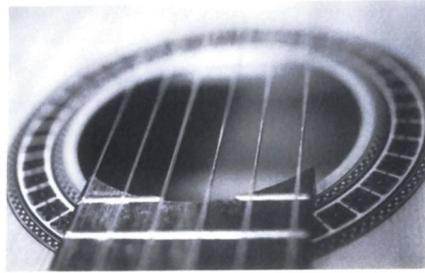
$$\text{e quindi } \lambda = \frac{v}{f} = 0,14\text{m}$$

Ha senso quanto ho scritto?

facciamo degli esperimenti concettuali.

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori

- 15 La corda di uno strumento musicale ha una densità lineare di 2,5 g/m ed è soggetta a una tensione di 10 N. Calcola la velocità e la lunghezza d'onda di un'onda armonica di frequenza  $4,4 \cdot 10^4$  Hz che si propaga lungo la corda.



purtroppo, la soluzione non è leggibile!  $\frac{m}{s} \cdot \frac{m}{m}$

Un primo passo potrebbe essere quello di fare una "verifica dimensionale", essa non è un vero e proprio "esperimento concettuale" ed oltre a questo semplice esempio non la prenderemo più in considerazione, ma può essere utile come primo step per approcciarsi all'idea di fondo degli esperimenti concettuali e dell'aggiornamento del proprio livello di convinzione. dunque:

SE il mio metodo risolutivo è corretto e stiamo trattando un'onda stazionaria su una corda E la velocità è effettivamente espressa in quel modo,

ALLORA dall'equazione dovrei ottenere le corrette unità per la velocità.

E, facendo i conti:

$$\frac{m}{s} = \sqrt{\frac{N}{\left(\frac{kg}{m}\right)}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{kg \cdot m}{s^2}\right)}{\frac{kg}{m}}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s}$$

DI CONSEGUENZA ho ricevuto una debole conferma della mia ipotesi risolutiva.

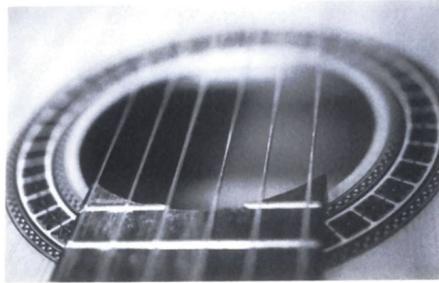
Possiamo porre  $R = 1.5$  quindi:

$$C_f = \frac{0.46 \cdot 1.5}{0.46 \cdot 1.5 + 1 - 0.46} = 0.56$$

Non è schizzata alle stelle, ma la mia fiducia nei confronti della soluzione è certamente aumentata.

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori

- 15 La corda di uno strumento musicale ha una densità lineare di 2,5 g/m ed è soggetta a una tensione di 10 N. Calcola la velocità e la lunghezza d'onda di un'onda armonica di frequenza  $4,4 \cdot 10^2$  Hz che si propaga lungo la corda.



pur troppo, la soluzione non è leggibile  $\frac{m}{s}$ ;  $\frac{m}{s}$  m]

Pensando ad una chitarra mi viene in mente che per accordarla si va ad agire sulla tensione delle corde, aumentandola il suono esce più acuto, ossia ad una frequenza maggiore.

esperimento concettuale:

SE il mio metodo risolutivo è corretto

E io aumentassi la tensione della corda,

mantenendo costanti gli altri parametri del problema, compresa la lunghezza d'onda che ho trovato.

ALLORA mi aspetto che la variazione nella velocità che causo corrisponda ad una frequenza (e quindi ad una nota) più alta.

E svolgendo i calcoli:

$$T = 10N - > 20N$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 89 \frac{m}{s}$$

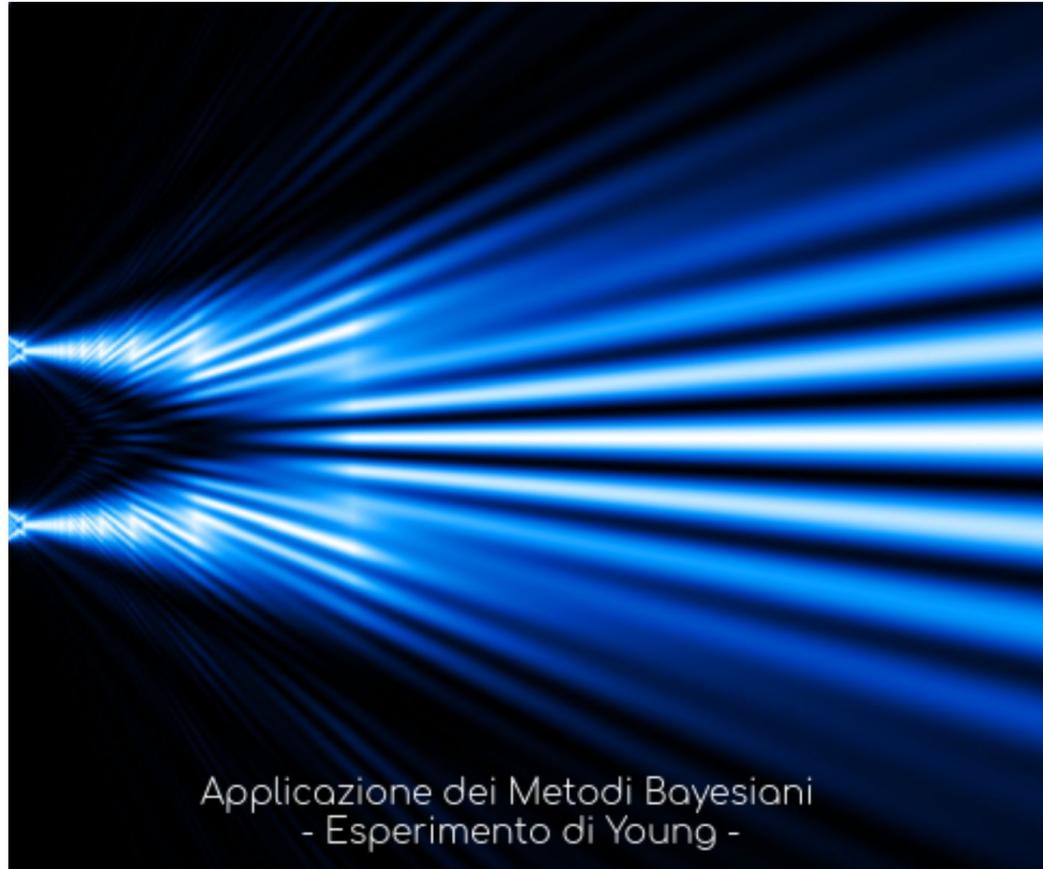
$$\text{e quindi } f = \frac{v}{\lambda} = 6,4 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$

DI CONSEGUENZA posso attribuire maggior valore alla mia ipotesi risolutiva. ho ricevuto una "sostanziale conferma"

R=7 e quindi

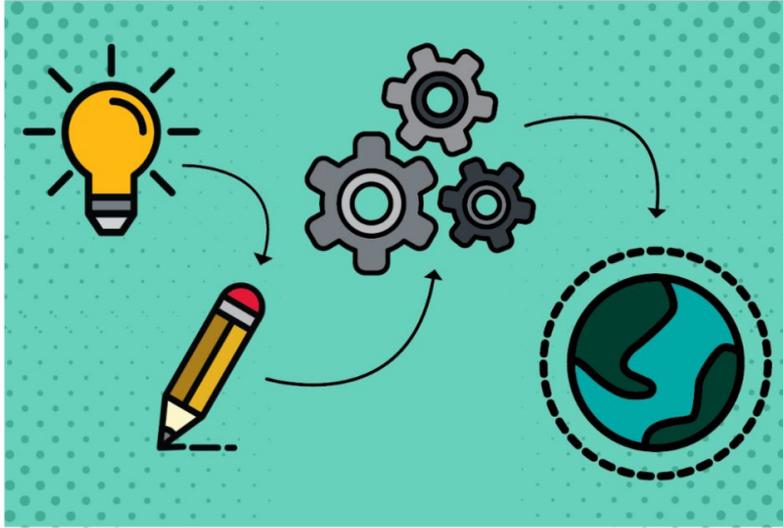
$$C_f = \frac{0,56 \cdot 7}{0,56 \cdot 7 + 1 - 0,56} = 0,90$$

il mio livello di convinzione è ora sufficiente a spingermi a consegnare il risultato del problema.



Applicazione dei Metodi Bayesiani  
- Esperimento di Young -

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori - Esperimento di Young



A differenza dei compiti assegnati, la scienza non si fa esclusivamente stando seduti a riflettere sulla propria scrivania.

Il passaggio per noi ora fondamentale è quello di andare oltre il puro esperimento concettuale basato unicamente sui calcoli, e lanciarsi verso l'ideazione di esperienze reali, poiché il fine ultimo della scienza non è quello di rimuginare su sé stessa, ma di descrivere accuratamente il mondo in cui viviamo.

Le situazioni surreali e semplificate dei problemi di testo, spesso tendono a creare un qualche distacco dalla realtà e farci chiedere: "Sì, ma tutto ciò a che cosa mi serve nel mondo reale?", dove la resistenza dell'aria esiste, dove le funi non sono indistruttibili e dove le onde del mare non sembrano descrivere una perfetta funzione sinusoidale.

Ma non dobbiamo scordare che è la padronanza delle situazioni più semplici che ci permette poi di destreggiarci nel mondo fisico, come vedremo oggi.

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori - Esperimento di Young



Vediamo quali sono i passaggi fondamentali di un'esperienza laboratoriale, affiancati ad un esempio pratico.

## 1 - IPOTESI:

Il primo passo consiste sempre nell'elaborare correttamente e nel modo più completo possibile l'ipotesi che si vuole testare, stabilendo un livello di convinzione iniziale.

Consideriamo un giocattolo costituito da una molla che lancia una macchina lungo una traiettoria rettilinea. Il costruttore del giocattolo afferma che l'auto raggiunge una velocità media di 10m/s. vogliamo testare questa dichiarazione.

ipotesi: L'auto raggiunge effettivamente la velocità media dichiarata dal costruttore.

livello di convinzione:  $C_i = 0.9$  (ci fidiamo abbastanza)



## 2 - DESIGN DELL'ESPERIMENTO:

Stabilita l'ipotesi da testare è **ESSENZIALE** descrivere nei minimi dettagli *COME* si intende effettuare la verifica. L'attenzione non va infatti rivolta unicamente ai calcoli necessari ad ottenere il parametro cercato (la velocità dell'auto), ma deve soffermarsi accuratamente anche sulle modalità operative dell'esperimento.

Di fondamentale importanza nel mondo scientifico è infatti la ripetibilità dei risultati: il mio esperimento ha valore oggettivo unicamente se un collega può leggere il mio operato, provare a ripetere la stessa esperienza ed ottenere risultati coerenti. Se non ci si sofferma a sufficienza sulle caratteristiche dell'esperimento, si ottengono poi dei risultati che non possono essere riottenuti dagli altri scienziati per mancanza di informazioni.



## 2 - DESIGN DELL'ESPERIMENTO:

Nel nostro caso possiamo procedere in questo modo:

- Segnare con del nastro colorato due punti sufficientemente distanti sul percorso
- Misurare con un metro a nastro la lunghezza che intercorre tra i due segnali appena disposti.
- Un operatore è addetto alla carica della molla, un secondo operatore possiede invece un cronometro
- Al rilascio della macchinina, l'operatore dotato di cronometro farà partire lo strumento superato il primo segmento di nastro e lo interromperà raggiunto il secondo.
- Dalla misura dell'intervallo di tempo e della distanza che intercorre tra i due segnali possiamo ottenere la velocità media che andiamo cercando.

Si eseguono queste misure diverse volte.

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori - Esperimento di Young



## 2 - DESIGN DELL'ESPERIMENTO:

Idealmente abbiamo il desiderio di minimizzare quanto più possibile gli errori associati alla misura, ogni decisione presa per fare ciò è bene venga specificata. Nel nostro caso:

- i due segnali devono essere quanto più separati possibile per permettere all'operatore di poterli distinguere adeguatamente.
- Lo spesso del nastro è bene venga minimizzato così da non avere incertezza sul punto di inizio e di fine del percorso noto
- La molla andrebbe sempre caricata allo stesso modo, avendo quindi o un sistema di blocco opportuno o un segno sul banco a cui fare riferimento.



## 3 - ANALISI DATI:

Il terzo step consiste nel raccogliere tutti i dati raccolti, ordinarli, valutarli ed utilizzarli per calcolare le grandezze cercate.

Si faccia attenzione al fatto che ad ogni grandezza misurata è associata una incertezza.

Questa può essere legata alla natura dello strumento ed al suo funzionamento (Errori Massimi) oppure alla fluttuazione statistica legata alla ripetizione delle misure (Errori Statistici).



## 4 - ANALISI DEGLI ERRORI

La trattazione adeguata degli errori richiede conoscenze ulteriori a quelle a nostra disposizione, quindi non ce ne occuperemo.

Ci tengo però ugualmente a fare presente questo passaggio perché ad esso è associato un concetto di grande importanza:

Ogni risultato di natura scientifica è tale solo in relazione all'errore ad esso associato.

Se tentassimo di misurare la massa di un singolo elettrone utilizzando una bilancia da cucina, correttamente diremmo:

$$m_e = 0 \pm 0.05 \text{ g}$$

Ma a questa misura è associata una incertezza spropositatamente enorme rispetto al valore della grandezza che andiamo cercando, tanto che secondo la stessa bilancia non potremmo distinguere un elettrone da una manciata di molecole.

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori - Esperimento di Young



l'analisi degli errori è dunque molto importante per il passaggio successivo:

## 5 - VALUTAZIONE DEI RISULTATI

Come visto per l'esperimento concettuale, alla fine di tutto, ciò che dobbiamo fare è valutare l'esito della nostra esperienza, dicendo se abbiamo ottenuto una conferma, una confutazione o *un risultato nullo*.

Ebbene, un ottimo metodo per ottenere un esito nullo è quello di avere delle incertezze troppo grandi.

Supponiamo infatti che la velocità trovata per la nostra macchina sia  $v = 8.34 \pm 5 \frac{m}{s}$

in questo caso non saremmo in grado di stabilire l'esito dell'esperimento, in quanto questo risultato sarebbe sì in accordo con il valore fornito dal costruttore (10 m/s), ma anche con uno completamente diverso (3 m/s ad esempio)...



## 5 - VALUTAZIONE DEI RISULTATI

Ammettendo di avere un esito con un'incertezza *ragionevole*, possiamo invece, come al solito, avere una:

CONFERMA - l'esito avvalorava l'ipotesi ed è coerente con quanto atteso entro l'incertezza trovata

CONFUTAZIONE - l'esito non è concorde con l'ipotesi di partenza entro l'incertezza trovata

consideriamo però un altro possibile esito:

FALSA CONFUTAZIONE - l'esito non è concorde con l'ipotesi trovata...ma ciò è dovuto ad alcune incorrettezze riconoscibili nella misura.

Supponiamo di aver trovato ad esempio l'esito:

$$v = 9.05 \pm 0.6 \frac{m}{s}$$



## 5 - VALUTAZIONE DEI RISULTATI

Un po' adirati ci rivolgiamo al costruttore, chiamandolo per chiedere spiegazioni.

Molto gentilmente esso ci risponde comunicandoci che la velocità da loro fornita è da intendersi "Nel vuoto" e che nella nostra esperienza non è stata valutata e sottratta la resistenza dovuta all'attrito con l'aria.

In questo caso quella che abbiamo ottenuto potrebbe trattarsi di una falsa confutazione...ossia è necessario screditare l'esperienza effettuata, **NON** l'ipotesi di partenza!.

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori - Esperimento di Young

R	Interpretazione
$< \frac{1}{150}$	Confutazione molto forte
tra $\frac{1}{150}$ e $\frac{1}{20}$	Confutazione forte
tra $\frac{1}{20}$ e $\frac{1}{3}$	Sostanziale confutazione
tra $\frac{1}{3}$ e 1	debole confutazione
1	esito nullo
tra 1 e 3	debole conferma
tra 3 e 20	sostanziale conferma
tra 20 e 150	conferma importante
$> 150$	conferma molto importante

## 6 - AGGIORNAMENTO BAYESIANO

Dopo aver valutato i risultati non resta che procedere come di consueto stabilendo un valore di R ed aggiornando il nostro livello di convinzione.

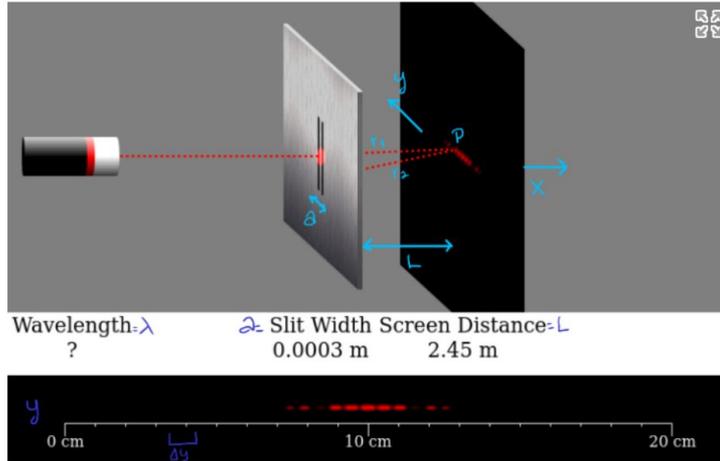
Nel nostro caso avendo ottenuto una falsa confutazione e non avendo ulteriormente esplorato l'ipotesi di resistenza in aria, possiamo concludere di aver ottenuto un ESITO NULLO,  $R = 1$ .

E la nostra convinzione relativa al valore riportato sulla scatola del nostro giocattolo rimane invariata

$$C_f = C_i = 0.9$$

Continuiamo a fidarci del costruttore allo stesso modo.

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori - Esperimento di Young



Opportunamente decidi di allestire uno schermo ed una doppia fenditura, allineati in modo da poter eseguire l'esperimento di Young.

Sia questo il tuo laboratorio:

<https://www.physicsclassroom.com/Physics-Interactives/Light-and-Color/Youngs-Experiment/Youngs-Experiment-Interactive>

Prova ad eseguire correttamente le misure per ottenere la lunghezza d'onda. (Si ricorda che il Massimo ed i minimi centrali sono di ordine 0,  $m = 0$ )

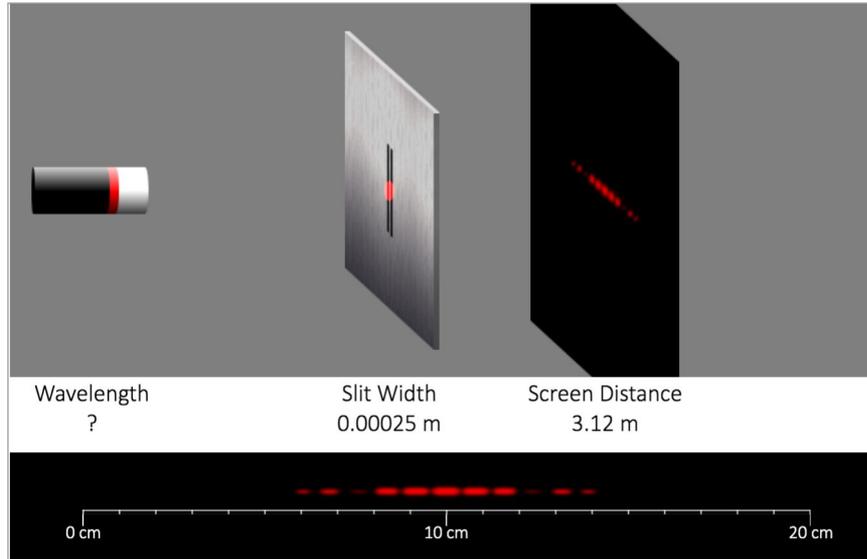
Delta_y(m)	a(m)	L(m)	m1-m2	lunghezza d'onda (nm)
	0.00025			
	0.00025			
	0.00025			

# Aggiornamento Bayesiano e Fenomeni Ondulatori - Esperimento di Young

## Using this Interactive

The Young's Double Slit Experiment Interactive is shown in the iFrame below. There is a small hot spot in the top-left corner. Clicking/tapping the hot spot opens the Interactive in full-screen mode. Use the Escape key on a keyboard (or comparable method) to exit from full-screen mode.

There is a second hot-spot in the lower-right corner of the iFrame. Dragging this hot-spot allows you to change the size of iFrame to whatever dimensions you prefer.



# Physics Education Laboratory Lecture 22

## Modeling Instruction

Francesco Longo - 11/12/25

Un concetto scientifico può essere utilizzato per caratterizzare un dato fenomeno fisico, nonché per sviluppare nuovi costrutti.

Il dominio di un concetto scientifico è costituito da una serie di riferimenti che condividono una caratteristica specific.

L'espressione include la sua identificazione, simboli, etichette, raffigurazioni matematiche e l'insieme della semantica corrispondente per interpretare le varie forme.

L'organizzazione del concetto è costituita dalla rete di relazioni con altri concetti tramite assiomi, definizioni, leggi.

Questa dimensione stabilisce la natura quantitativa della grandezza in questione, specificandone le operazioni che possono essere intraprese e come misurare tale grandezza.

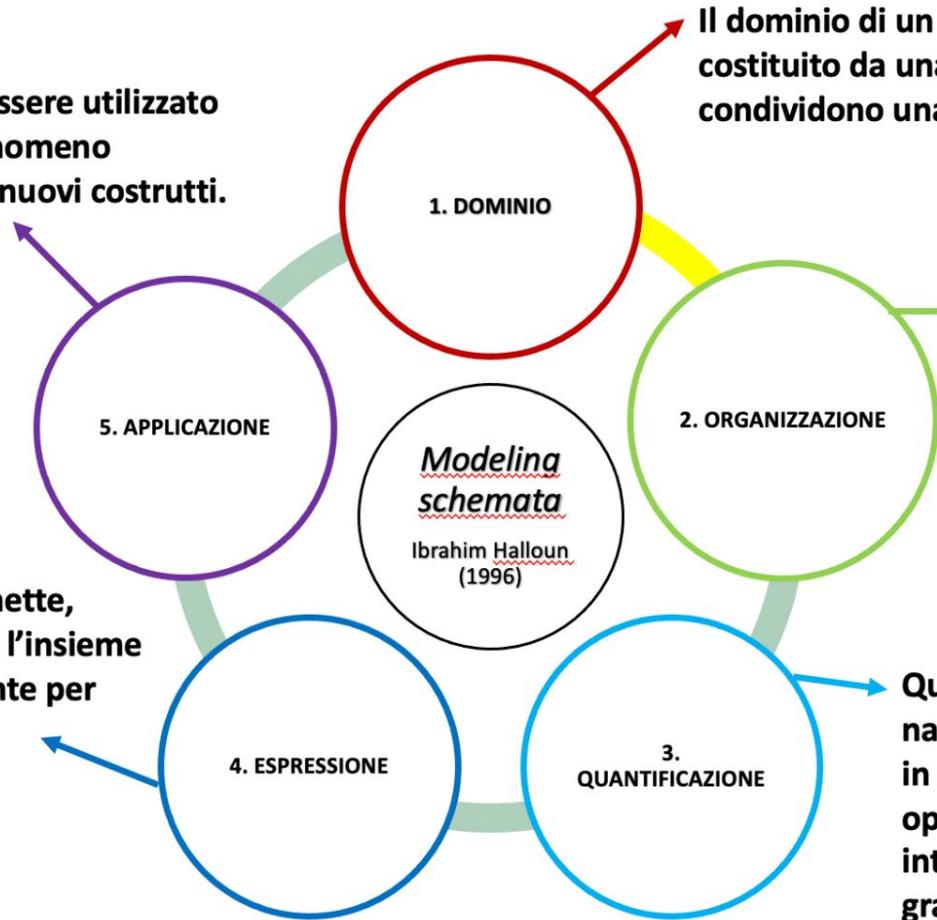


Table I. Comparison of content in Modeling Instruction and a more standard course.

Modeling Instruction	Standard course
Models are constructs that are built in accordance with physical laws and constraints.	Laws are given in equation form and applied to solve problems.
Models are built by the application of representational tools which can then be used to solve problems.	Problem solving is primarily quantitative manipulation of equations.
Models are temporal and must be validated, refined and applied.	Content is permanent; validation has already taken place.
General models are applied to specific physical situations.	Laws apply to specific situations.
Modeling is a process that is learned through accumulating experience.	Problem solving is a game that requires tricks and is learned by solving large numbers of problems.
Models are distinct from the phenomena they represent and can include causal, descriptive, and predictive elements.	Content is indistinguishable from the phenomena.

Table II. Standard Modeling Instructional cycle applied to the development of a general constant acceleration model.

Step	Instructional goal	Example student activity
Introduction and Representation	Phenomenology—initiates the need for a new model (accelerated motion is not explained by general constant velocity model.) Introduction of kinematic graphs as useful representation.	Experimentation involving students moving with constant acceleration in front of motion detectors.
Coordination of Representations	Relate kinematic graphs to other common representations (motion maps).	Experimentation and conceptual activities.
Application	Begin to apply knowledge and tools. Develop experience, heuristics, and ability to draw conclusions based on representations.	Develop kinematic equations from kinematic graphs by analyzing velocity versus time graphs. Problem solving emphasizing use of modeling tools.
Abstraction and Generalization	Identify characteristics of representations in situations involving constant acceleration.	Review of constant acceleration and guided discussion.
Continued Incremental Development	Relate constant acceleration model to dynamical models and apply to new situations.	Continually revisit constant acceleration model, coordinate with energy and forces, apply to electricity and magnetism.

# Modeling instruction

## Modeling Instruction and 21st Century Learning Skills

AMERICAN MODELING TEACHERS ASSOCIATION



### Critical Thinking

- Information & Discovery
- Interpretation & Analysis
- Reasoning
- Problem Solving

### Creativity

- Idea Generation
- Idea Design & Refinement
- Openness & Courage to Explore
- Work Creatively with Others



### Collaboration

- Cooperation
- Responsibility & Productivity
- Construct Feedback
- Leadership & Initiative

### Communication

- Effective Listening
- Deliver Oral Presentations
- Engage in Conversations & Discussions
- Support an Argument with Claims



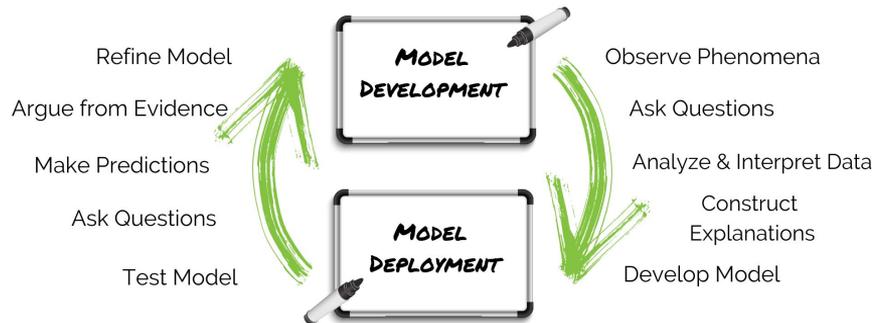
# Modeling Instruction



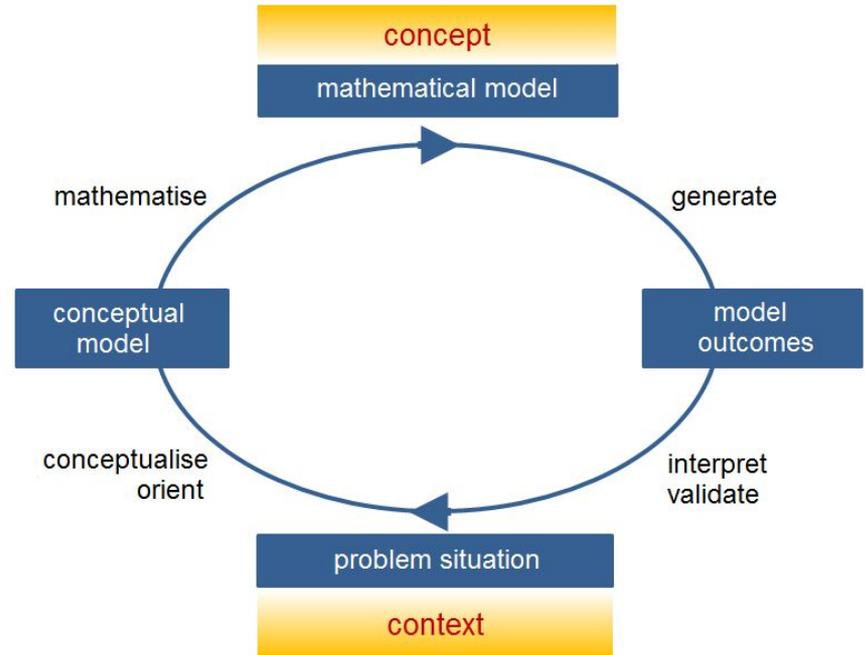
<https://youtu.be/nVnoGKLmApU>

# Modeling instruction

## Modeling Cycle

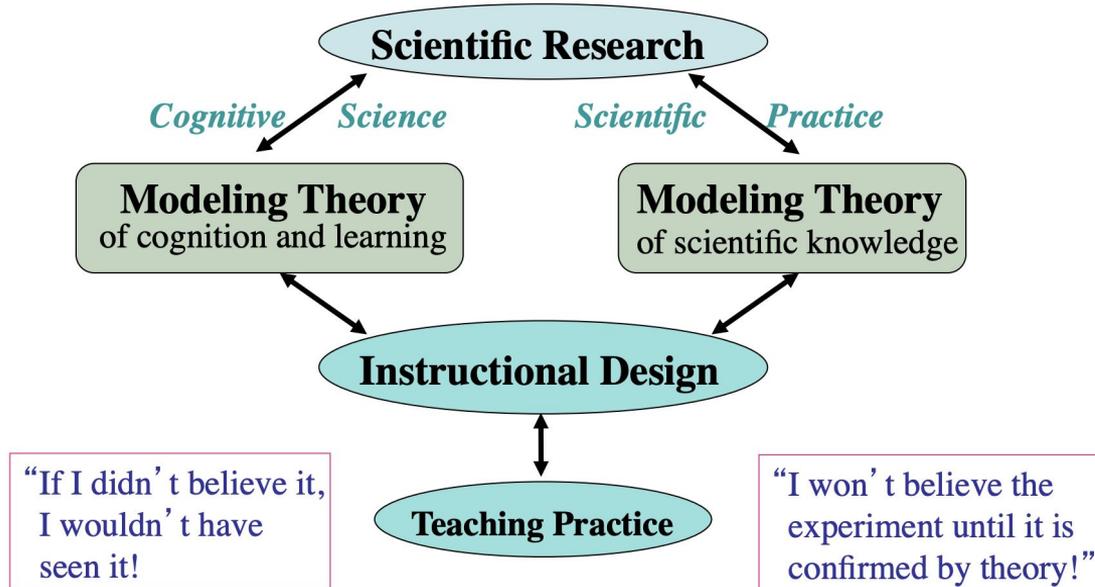


American Modeling Teachers Association  
[www.modelinginstruction.org](http://www.modelinginstruction.org)

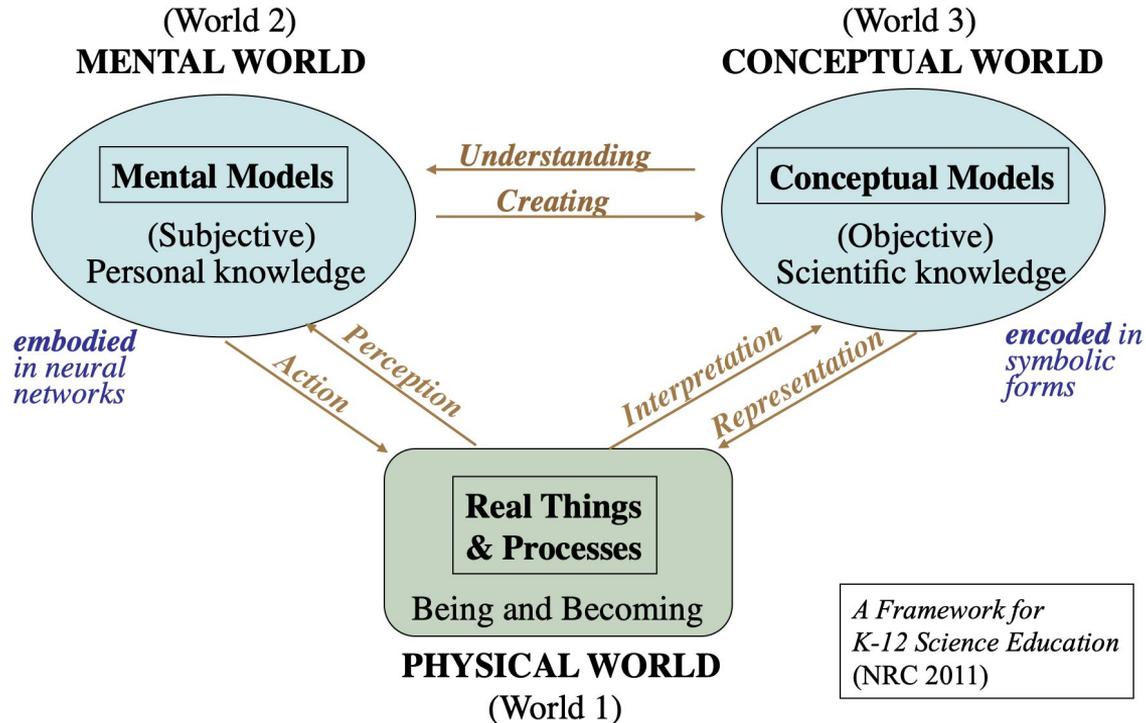


To justify strong claims about teaching and learning science, we need a coherent *theory of instruction* with empirical support.

## Modeling Theory: a research program



A crucial distinction: **Mental models** vs. **Conceptual models**



Why begin cycle by DOING science?

“I hear and I forget.

I see and I remember.

I **do**, and I **understand.**”

## Why is student discourse crucial?

“You don’t know what you know, ‘til you’ve heard yourself say it.”

Also, research at MIT’s Center for Collective Intelligence supports model-centered discourse, especially circle whiteboarding (board meetings). <http://cci.mit.edu>

# Modeling vs. Conventional

constructivist	vs.	transmissionist
cooperative inquiry	vs.	lecture/demonstration
student-centered	vs.	teacher-centered
active engagement	vs.	passive reception
student activity	vs.	teacher demonstration
student articulation	vs.	teacher presentation
lab-based	vs.	textbook-based

# Modeling Instruction

Modeling Instruction<sup>TM</sup> is a **guided-inquiry** approach to teaching science that organizes instruction around the handful of conceptual models that form the content core of the scientific disciplines. This method provides a framework for science instruction that approximates how scientists “do science.” Students build, test, and deploy conceptual models of physical relationships. Research has shown that students in Modeling Instruction classrooms perform significantly better on measures of conceptual knowledge than similar students in traditional science classrooms. [Follow this link for more information.](#)

# Modeling Instruction

Modeling Instruction<sup>TM</sup> works within a flexible curriculum design that can be used in a variety of disciplines, from introductory classes through Advanced Placement courses. Modeling teachers act as facilitators and help students **construct explanations** and **defend their conclusions with evidence**.

*In a Modeling classroom:*

- Instruction is organized into modeling cycles which move students through all phases of model development, evaluation, and application in concrete situations.
- The teacher sets the stage for student activities to establish common understanding of a question to be asked. Then, in small groups, students collaborate in planning and conducting experiments to answer or clarify the question.
- Students present and justify their conclusions in oral and/or written form, including a formulation of models for the phenomena in question and evaluation of the models by comparison with data.
- Technical terms and concepts are introduced by the teacher only after students display conceptual understanding to sharpen models, facilitate modeling activities, and improve the quality of discourse.

## CURIOUS? TAKE A SNEAK PEEK AT A MODELING WORKSHOP

ASTRONOMY MODELING

CHEMISTRY MODELING

PHYSICS MODELING

MODELING AND THE IB SCIENCE  
FRAMEWORK

WHAT IS COMPUTATIONAL  
MODELING?

INTRODUCTION TO MODELING  
INSTRUCTION

MIDDLE SCHOOL MODELING

---

# Modeling Instruction:

A Pedagogy and A Program

## Empowering Teachers

For rapid, deep and sustained STEM education reform

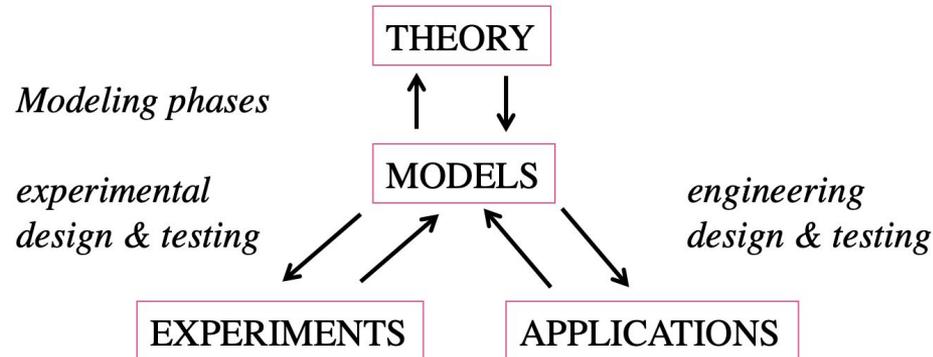
- I. Modeling Theory & Pedagogy (David Hestenes)
- II. Professional Development (Jane Jackson)
- III. *American Modeling Teachers Association* (AMTA)  
— the engine to drive reform (Colleen Megowan)

*SCIENCE is the name – MODELING is the game!*

## Modeling Instruction – in a nutshell!

A **pedagogy and curriculum design** centered on

- **Scientific models** as the content core of each science
- **Modeling** as the procedural core of science
- Cycling students through all phases of modeling



**Models** are basic **units of coherently organized knowledge:**  
**tools** for inference, *predictions, explanations, plans and designs*

## *Pedagogy versus content*

The most robust finding of science education research:

*You cannot separate pedagogy from content!!*

*Modeling Instruction* integrates curriculum and pedagogy:

- ★ *Curriculum* is organized around a small number of conceptual models as the *content core* of each scientific domain.
- ★ *Pedagogy* promotes scientific inquiry centered on making and using models as the *procedural core* of scientific knowledge
- ★ *Applicable to all STEM disciplines!!*
- Example: abstract mathematical concepts such as *variable*, *function* and *rate* can be explored within the context of mathematical models with concrete applications in physics and deployed to other subjects (i.e. chemistry, biology, economics).

*Modeling Pedagogy* – flexible, evolving, research-based

## Physics First

grade 9 physics	grade 10 chemistry	grade 11 biology	grade 12 AP courses
--------------------	-----------------------	---------------------	------------------------

### *Why Physics must be central to STEM ed:*

- It is essential for interpreting our most basic  
*perceptions of matter, motion and light*
  - That is why it was  
*the first science* to develop historically
  - It provides the foundation for *quantitative methods*  
& the first exemplar of *scientific method*
- **Quantitative reasoning** with number and unit goes hand-in-hand with *modeling and measurement*, which couples mathematics to science
    - The divorce of mathematics from physics is one of the most serious deficiencies in current educational systems!

## Elements of Modeling Pedagogy

Impediments to learning physics:

- (a) Misconceptions about common physical phenomena.
- (b) Misconceptions about science & scientific method.

Instructional objectives include:

- (a) a clear concept of "*physical model*," including both qualitative and quantitative aspects,
- (b) familiarity with a *basic set of models* as the core of introductory physics,
- (c) *skills in the techniques of modeling*, especially interplay between diagrammatic and symbolic representations,
- (d) *experience in the deployment of models* to understand the physical world--*to interpret and analyze data, to explain, predict, plan & solve problems*

**Model:** is a **representation of structure** (in a system/process)

## Four types of structure:

- (a) **system structure** (system schema):
  - **composition** (**internal parts** of the system)
  - **environment** (**external agents** linked to the system)
  - **connections** (external and internal **causal links**)
- (b) **geometric structure**
  - **position** with respect to a reference frame (external)
  - **configuration** (geometric relations among the parts)
- (c) **temporal structure** specifies change in state variables
  - **descriptive models** (explicit functions of time)
  - **causal models** (dynamical equations)
- (d) **interaction structure**
  - **interactions** (as functions of state variables)

**These four types suffice for modeling in all the sciences!!**

- One needs examples to understand them

**Quantitative methods** *require mathematical models* to interpret data!

**Basic Mathematical Models** are about **RATE!**

- 1. Constant rate** (linear change): graphs and equations for straight lines  
(proportional reasoning, constant velocity, acceleration, force, momentum, energy, etc.)
- 2. Constant change in rate** (quadratic change) graphs and equations for parabolas  
(constant acceleration, kinetic and elastic potential energy, etc.)
- 3. Rate proportional to amount:** doubling time,  
graphs and equations of exponential growth and decay  
(monetary interest, population growth, radioactive decay, etc.)
- 4. Change in rate proportional to amount:** graphs and equations of  
trigonometric functions (waves and vibrations, harmonic oscillators, etc.)
- 5. Sudden change:** stepwise graphs and inflection points (Impulsive force, etc.)

Ubiquitous: rich & unlimited applications to science and modern life!

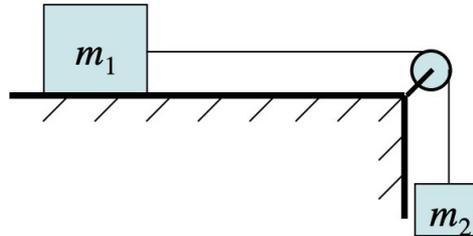
Skill in using these models in a variety of situations

- an essential component of math and science literacy.
- should be *cultivated* deliberately, systematically & repeatedly

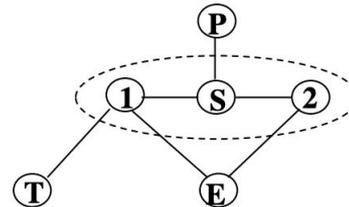
Systematic use of **system schemas** as a modeling tool  
has the largest immediate impact on student performance  
of any teaching innovation I know!!

It tells students how to start solving any given problem!

**Situation Map**



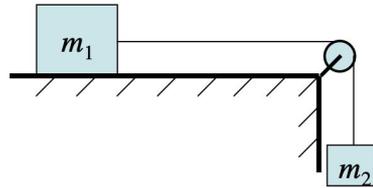
**System Schema**



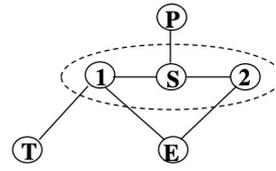
**System schemas are not unique!!**

## Distributed representations of structure in a conceptual model

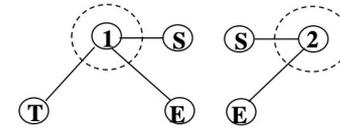
**Situation Map**



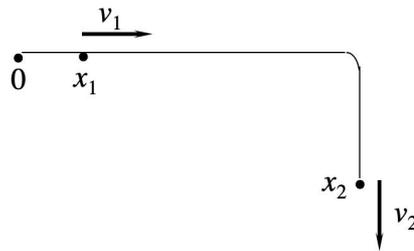
**System Schema**



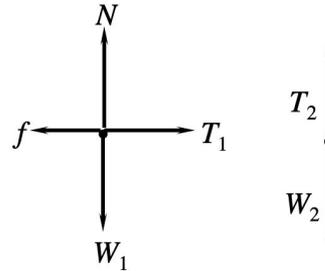
**Subsystem Schemas**



**Motion Map**



**Interaction Maps**



**Interaction Laws**

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 \\ f &= \mu N \\ W_1 &= m_1 g \\ W_2 &= m_2 g \end{aligned}$$

**Geometric Structure**

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + L \\ \rightarrow v_2 &= v_1 \\ \rightarrow a_2 &= a_1 \end{aligned}$$

**Temporal Structure:**  
(Eqns. of Motion)

$$\rightarrow m_2 g - m_1 g = (m_1 + m_2) a_1$$

$$\begin{aligned} T_1 - \mu N &= m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 &= m_2 a_2 \\ N &= m_1 g \end{aligned}$$

## Instructional Modeling Cycle

### Stage I: Model development ( $\approx$ one week)

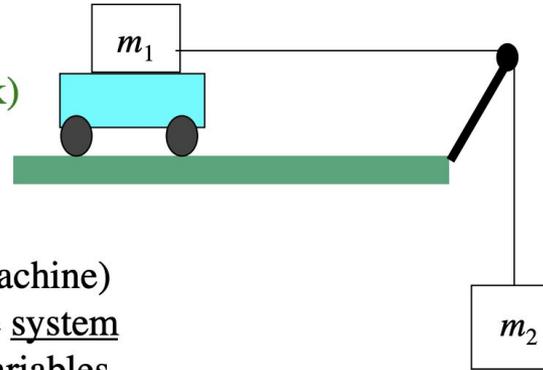
#### A. Description

- **Instructor sets context**  
( e.g. Modified Atwood machine)
- **Guides students** to identify the system  
of interest and relevant variables
- **Discusses** elements of experimental design  
(e.g., dependent and independent variables)

#### B. Experimentation and Model Formation

##### **Organize student groups of 3 or 2 or 4**

- Design and perform own experiments
- Formulate functional relations among variables
- Evaluate fit to data



C. Post-lab analysis: Formulate a conclusion.  
Defend it with evidence and argument;

## WhiteBoarding

(shared responsibility)

Presentations must address the questions:

- **What is your model** for the observed system?
- **How good is its fit** to the empirical data?
- **What are the sources of error?**
  - limitations in experimental accuracy?
  - limitations of the mathematical model?



## Instructional Modeling Cycle (six cycles per semester)

### Stage II: Model deployment ( $\approx$ one week)

Students are presented with diverse new situations or problems

- that require abstracting the model from the original context
- to *describe, explain, predict, design or solve*

Results are summarized on white boards  
and defended orally in class discussion

Objective: improving the quality of **scientific discourse**, and  
**progressive deepening** of student understanding of models  
and modeling with each pass through the modeling cycle.

**Problem Solving**: The solution to every problem is a model!

The **S.I.M.** approach (David Pritchard, MIT)

**S.** Choose a **system** to consider

**I.** Describe its **interactions**.

**M.** Choose or construct a **model** to solve the problem.

---

# Physics Education

## Laboratory

### Lecture 22

Content Knowledge for Quantum Mechanics

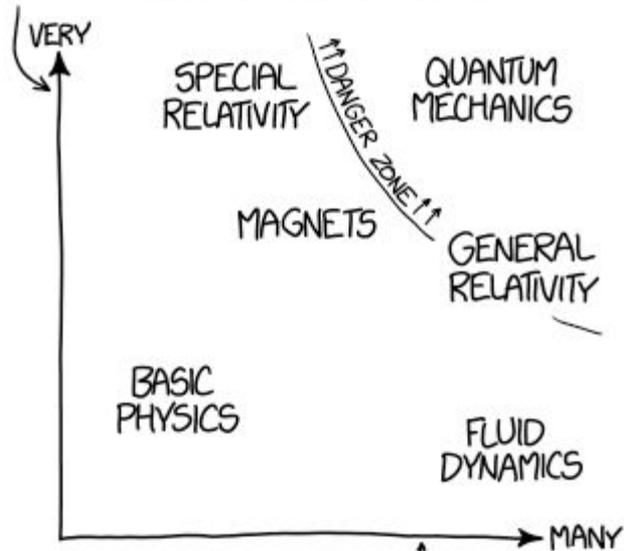
Physics. The use of metaphors & the history

of Physics

Francesco Longo • 11/12/2025

---

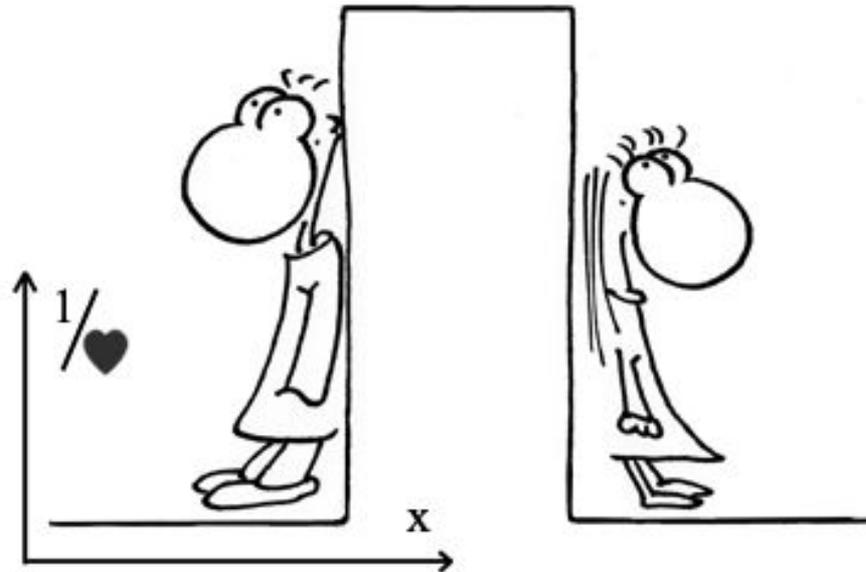
HOW PHILOSOPHICALLY EXCITING THE QUESTIONS ARE TO A NOVICE STUDENT



HOW MANY YEARS OF MATH ARE NEEDED TO UNDERSTAND THE ANSWERS

WHY SO MANY PEOPLE HAVE WEIRD IDEAS ABOUT QUANTUM MECHANICS

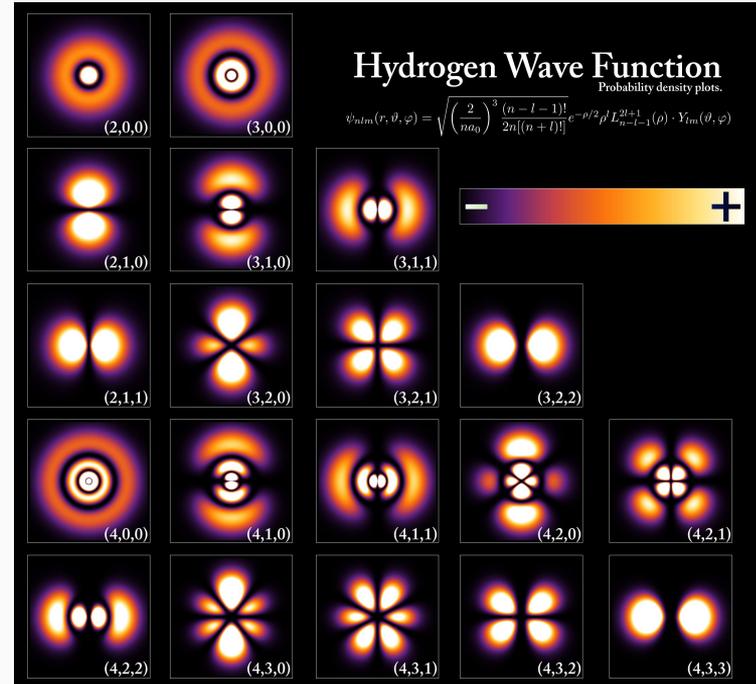
thescientificcartoonist.com



Waiting for the tunnel effect.

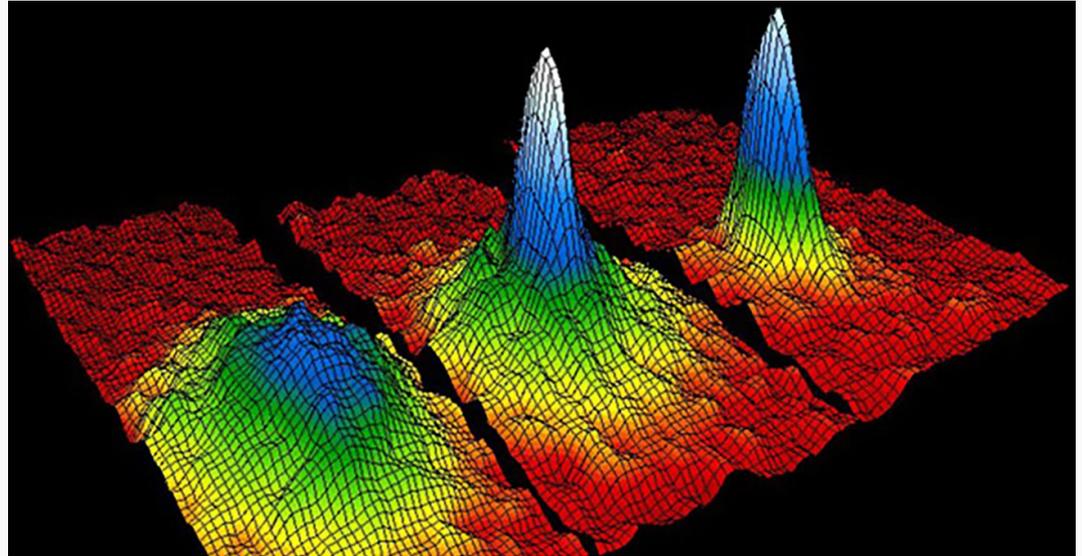
# Key Concepts in Quantum Mechanics

- Discrete vs Continuous
- Waves or Particles
- Probability Theory
- What?



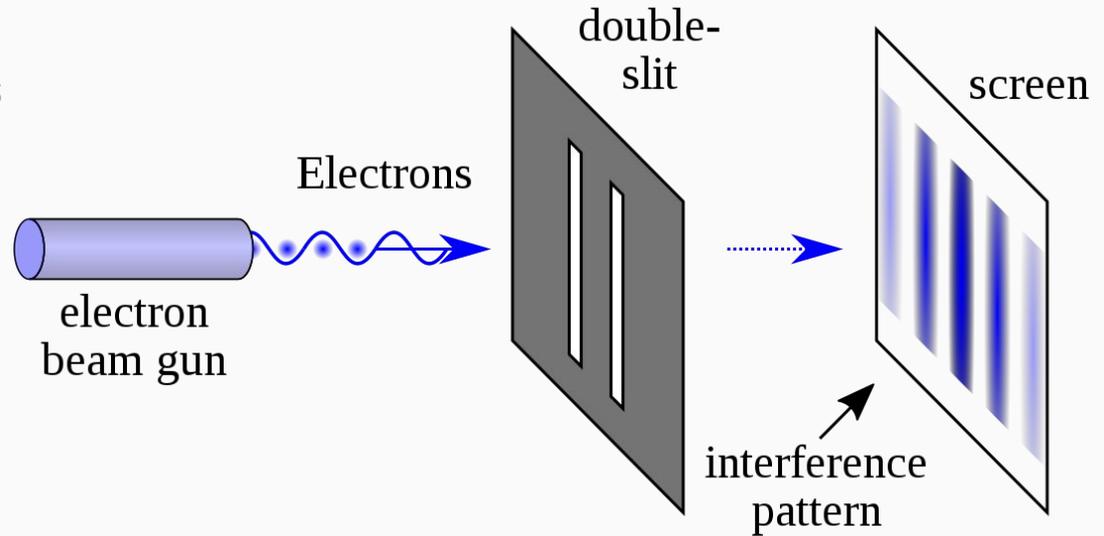
# Key Concepts in Quantum Mechanics

- Discrete vs Continuous
- Microscopic vs Macroscopic



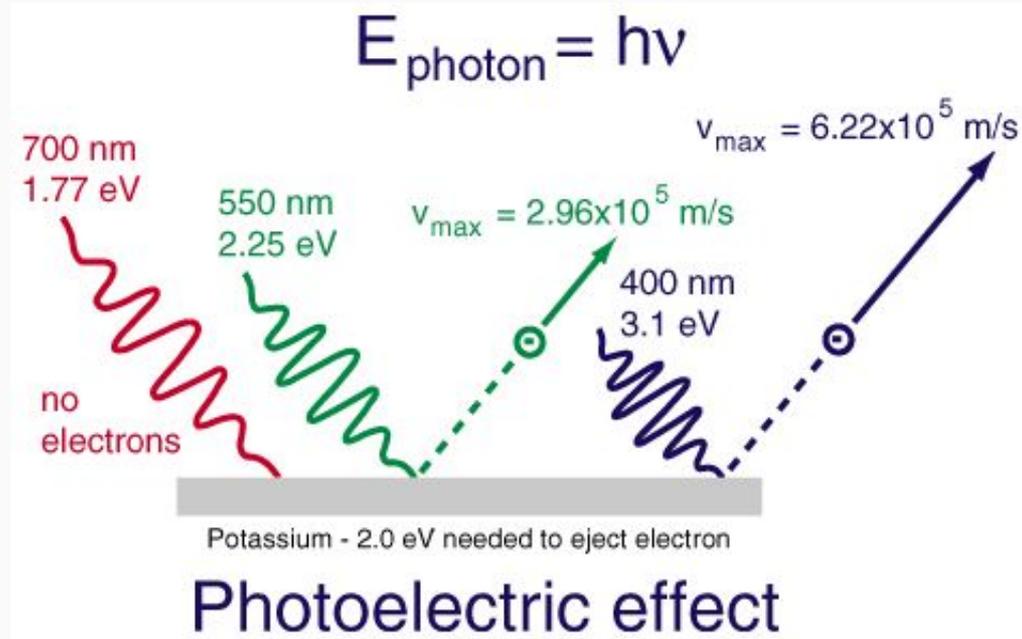
# Key Concepts in Quantum Mechanics

- Waves or Particles ?
- The role of the observers



# Key Concepts in Quantum Mechanics

- Key Experiments



# Key Concepts in Quantum Mechanics

- Theory of Probability
- Schroedinger equation
- What?

## Schrödinger equation

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t)$$

Second Series

December, 1926

Vol. 28, No. 6

### THE PHYSICAL REVIEW

#### AN UNDULATORY THEORY OF THE MECHANICS OF ATOMS AND MOLECULES

BY E. SCHRÖDINGER

##### ABSTRACT

The paper gives an account of the author's work on a new form of quantum theory. §1. The Hamiltonian analogy between mechanics and optics. §2. The analogy is to be extended to include real "physical" or "undulatory" mechanics instead of mere geometrical mechanics. §3. The significance of wave-length;

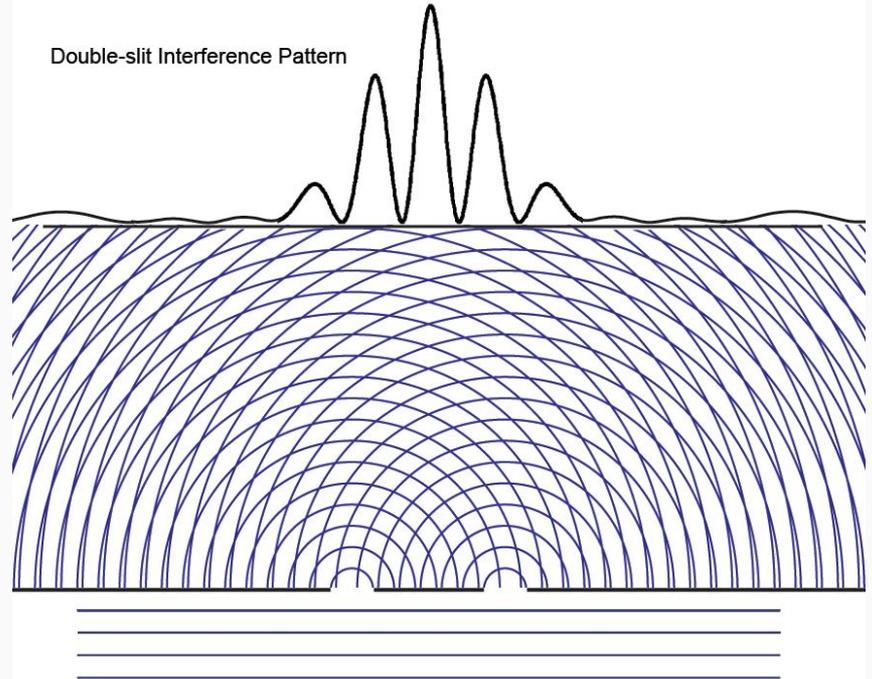


The Nobel Prize in Physics 1933  
Erwin Schrödinger, Paul A.M. Dirac

The Nobel Prize in Physics 1933 was awarded jointly to Erwin Schrödinger and Paul Adrien Maurice Dirac "for the discovery of new productive forms of atomic theory."

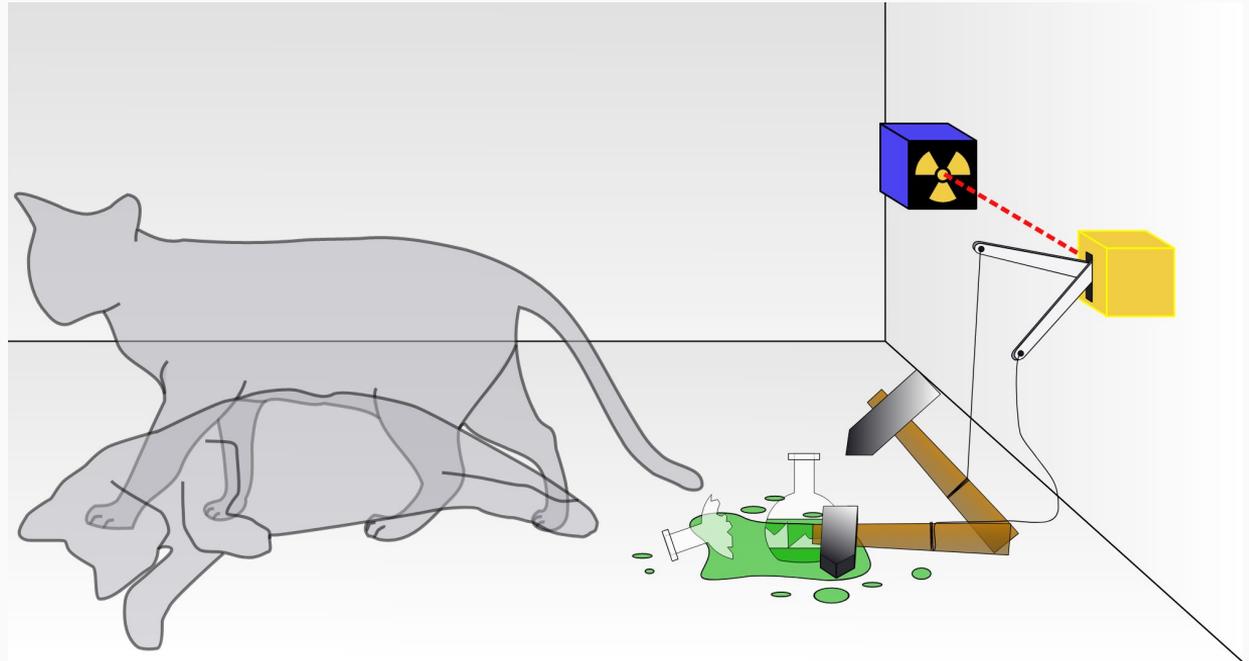


Double-slit Interference Pattern



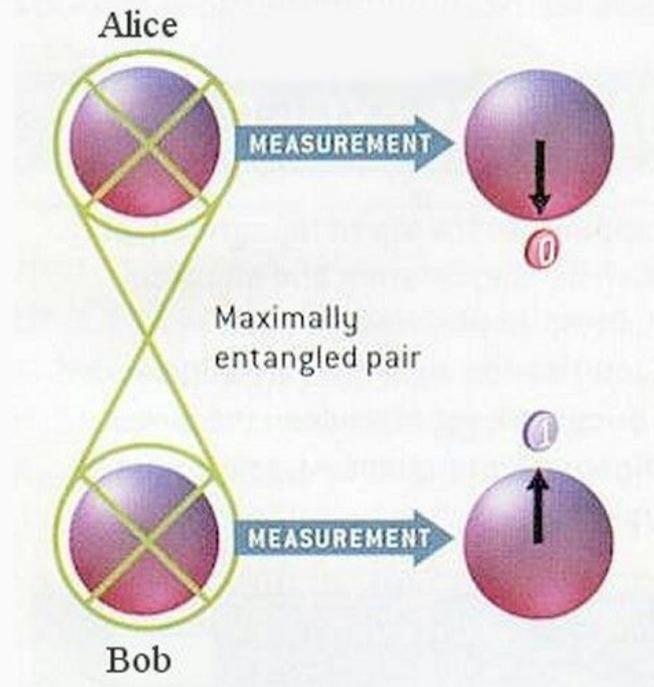
# Key Concepts in Quantum Mechanics

- Quantum paradoxes



# Key Concepts in Quantum Mechanics

- The entanglement

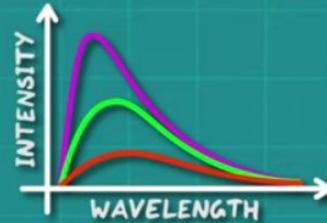


# PRE-QUANTUM MYSTERIES

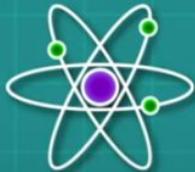
ATOMIC SPECTRA



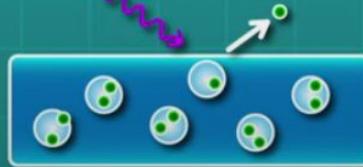
BLACKBODY RADIATION



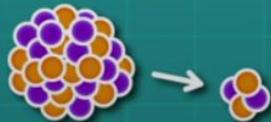
THE STABLE ATOM



PHOTOELECTRIC EFFECT



RADIOACTIVITY



## PRE-QUANTUM MYSTERIES

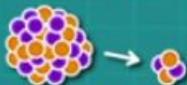
ATOMIC SPECTRA



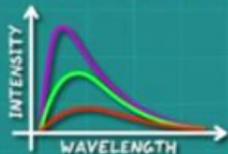
THE STABLE ATOM



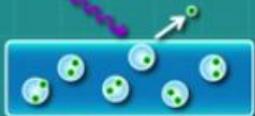
RADIOACTIVITY



BLACKBODY RADIATION



PHOTOELECTRIC EFFECT



## QUANTUM FOUNDATIONS

THE WAVE FUNCTION



PARTICLE-WAVE DUALITY



THE BORN RULE



INTERFERENCE PATTERN



DOUBLE SLIT EXPERIMENT



THE HEISENBERG UNCERTAINTY PRINCIPLE



DEFINITE POSITION



DEFINITE MOMENTUM

THE SCHRÖDINGER EQUATION

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t)$$

THE DIRAC EQUATION

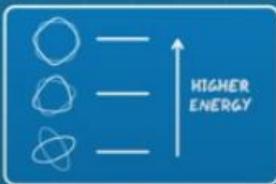
$$i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc\psi = 0$$

BELL'S THEOREM



NON-LOCALITY

ENERGY QUANTIZATION



# QUANTUM PHENOMENA

## PARTICLE PROPERTIES



## QUANTUM NUMBERS

## QUANTUM SPIN



## SUPERPOSITION



## SCHRÖDINGER'S CAT

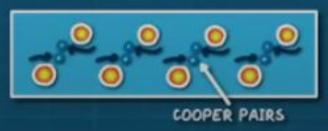
## ENTANGLEMENT



## QUANTUM TUNNELING



## SUPERCONDUCTIVITY



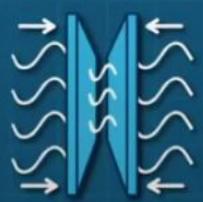
## QUANTUM HALL EFFECT



## SUPERFLUIDITY



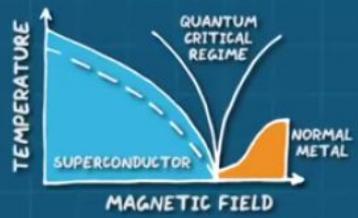
## CASIMIR EFFECT



## TOPOLOGICAL PHASE TRANSITIONS



## PHASE TRANSITIONS



## DEFINITE POSITION

## DEFINITE MOMENTUM

## UNCERTAINTY PRINCIPLE

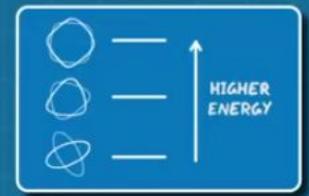


## BELL'S THEOREM



## NON-LOCALITY

## ENERGY QUANTIZATION



## ZERO-POINT ENERGY





COOPER PAIRS

SUPERFLUIDITY



NUCLEAR MAGNETIC RESONANCE IMAGING

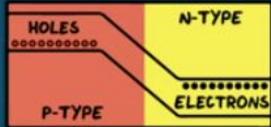
MAGNETIC RESONANCE IMAGING



SOLID STATE DEVICES

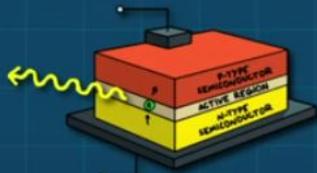
QUANTUM TECHNOLOGY

BAND THEORY OF SOLIDS



LIGHT EMITTING DIODES

POSITIVE TERMINAL



NEGATIVE TERMINAL

SUPERCONDUCTING MAGNETS

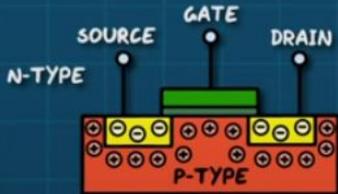


S.Q.U.I.D.S



JOSEPHSON JUNCTION

TRANSISTORS



LASERS



CHARGE-COUPLED DEVICES

CCD SENSOR



ATOMIC CLOCKS



ELECTRON MICROSCOPES

SCANNING TUNNELING MICROSCOPES

ATOMIC FORCE MICROSCOPES



SOLAR PANELS



ZERO-POINT ENERGY



## QUANTUM INFORMATION

QUANTUM CRYPTOGRAPHY



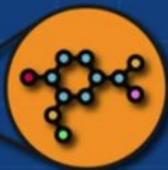
QUBITS



QUANTUM COMPUTING

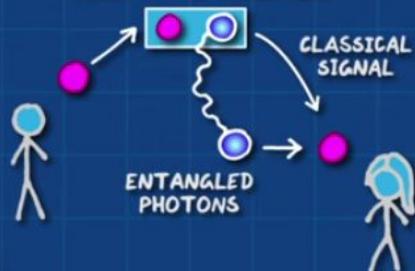


QUANTUM SIMULATION



QUANTUM TELEPORTATION

BELL-STATE ANALYSER

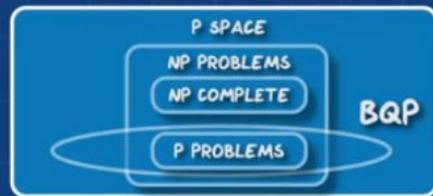


QUANTUM COMMUNICATION

QUANTUM INTERNET



QUANTUM COMPLEXITY  
COMPUTATIONAL COMPLEXITY



CONDENSED  
MATTER  
PHYSICS

## QUANTUM BIOLOGY

PHOTOSYNTHESIS



BIRD  
NAVIGATION



SENSE OF  
SMELL



ENZYMES



## COLD ATOM PHYSICS

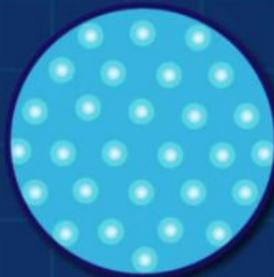
DEGENERATE  
ULTRACOLD GASES



DEGENERATE  
FERMI GAS

BOSE-EINSTEIN  
CONDENSATE

RYDBERG MATTER



QUANTUM  
SIMULATOR

GRAVITY  
SENSOR

TRANSDUCER  
FUNCTION

QUANTUM  
EFFECTS

SCANNING  
TUNNELING  
MICROSCOPES

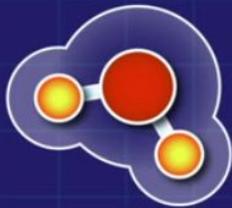
FORCE  
MICROSCOPES

## QUANTUM CHEMISTRY

ELECTRONIC  
STRUCTURE



MOLECULAR  
DYNAMICS



QUANTUM  
MONTE CARLO  
METHODS



## NUCLEAR PHYSICS

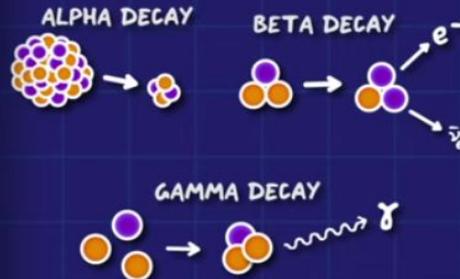
NUCLEAR FISSION



NUCLEAR FUSION



RADIOACTIVE DECAY



NUCLEAR  
POWER

NUCLEAR  
WEAPONS

NUCLEAR  
MEDICINE

MRI

ION IMPLANATION

RADIOCARBON DATING

## PARTICLE PHYSICS

QUANTUM CHROMODYNAMICS

STRONG FORCE

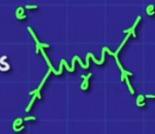


ELECTROWEAK INTERACTIONS

ELECTROMAGNETISM + WEAK FORCE

$\gamma$   $W^-$   $W^+$   $Z^0$

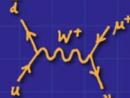
QUANTUM ELECTRODYNAMICS



UM  
TION

FEYNMAN DIAGRAMS

THE STANDARD MODEL OF PARTICLE PHYSICS

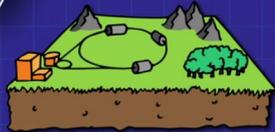


ANTI-MATTER

PROTON ANTI-PROTON



PARTICLE ACCELERATORS



QUARKS

THE HIGGS  
BOSON



GAUGE  
BOSONS

LEPTONS

NUCLEAR PHYSICS

NUCLEAR FISSION

NUCLEAR FUSION



## QUANTUM THEORY

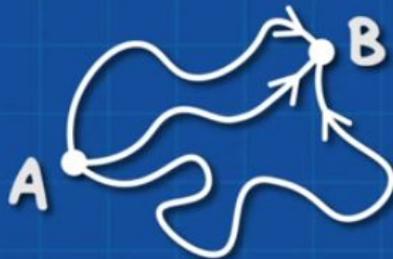
### POSTULATES (PARAPHRASED)

1. WAVE FUNCTION DETERMINES EVERYTHING
2. ALL OBSERVABLES HAVE OPERATORS
3. OBSERVABLES ARE HERMITIAN
4. EIGENFUNCTIONS OF OPERATORS ARE INDEPENDENT
5. EXPECTATION VALUE INTEGRAL
6. TIME DEPENDENT SCHRÖDINGER EQUATION

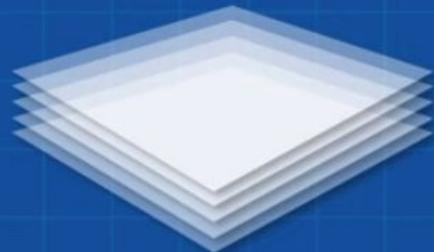
## QUANTUM INFORMATION

QUANTUM

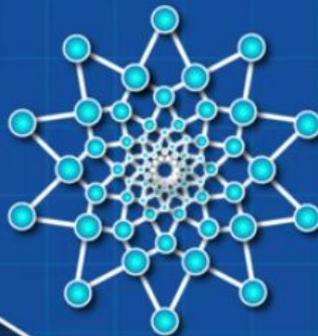
### PATH INTEGRALS



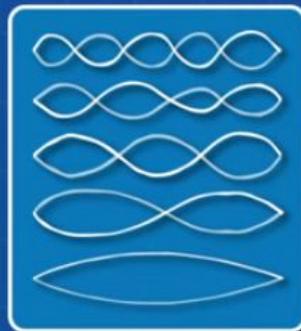
### QUANTUM FIELD THEORY



### SYMMETRIES

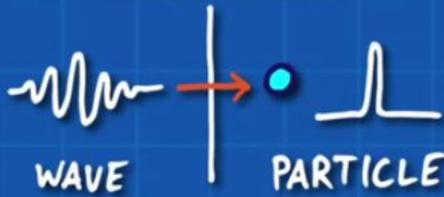


### HILBERT SPACE



# INTERPRETATIONS OF QUANTUM MECHANICS

## COPENHAGEN



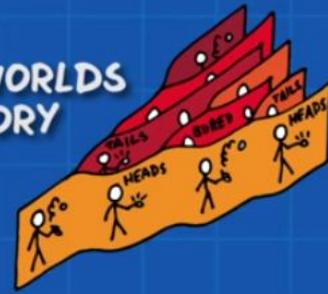
IS THE WAVEFUNCTION REAL?

THE MEASUREMENT PROBLEM

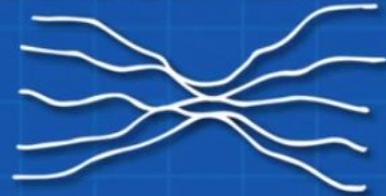
## PILOT WAVE



## MANY WORLDS THEORY



## CONSISTENT HISTORIES



## QBISM



AND MANY OTHERS...

TRANSACTIONAL INTERPRETATION

STOCHASTIC INTERPRETATION

QUANTUM DARWINISM

COSMOLOGICAL INTERPRETATION

ALTERNATIVE COLLAPSE

## QUANTUM GRAVITY

QUANTUM FIELD THEORY



QUANTUM MECHANICS

SPECIAL RELATIVITY

**BUT NOT  
GENERAL RELATIVITY  
AND SO NOT GRAVITY**

## QUANTUM GRAVITY

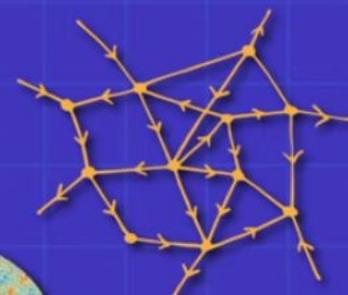
M-THEORY



STRING THEORY



LOOP QUANTUM GRAVITY

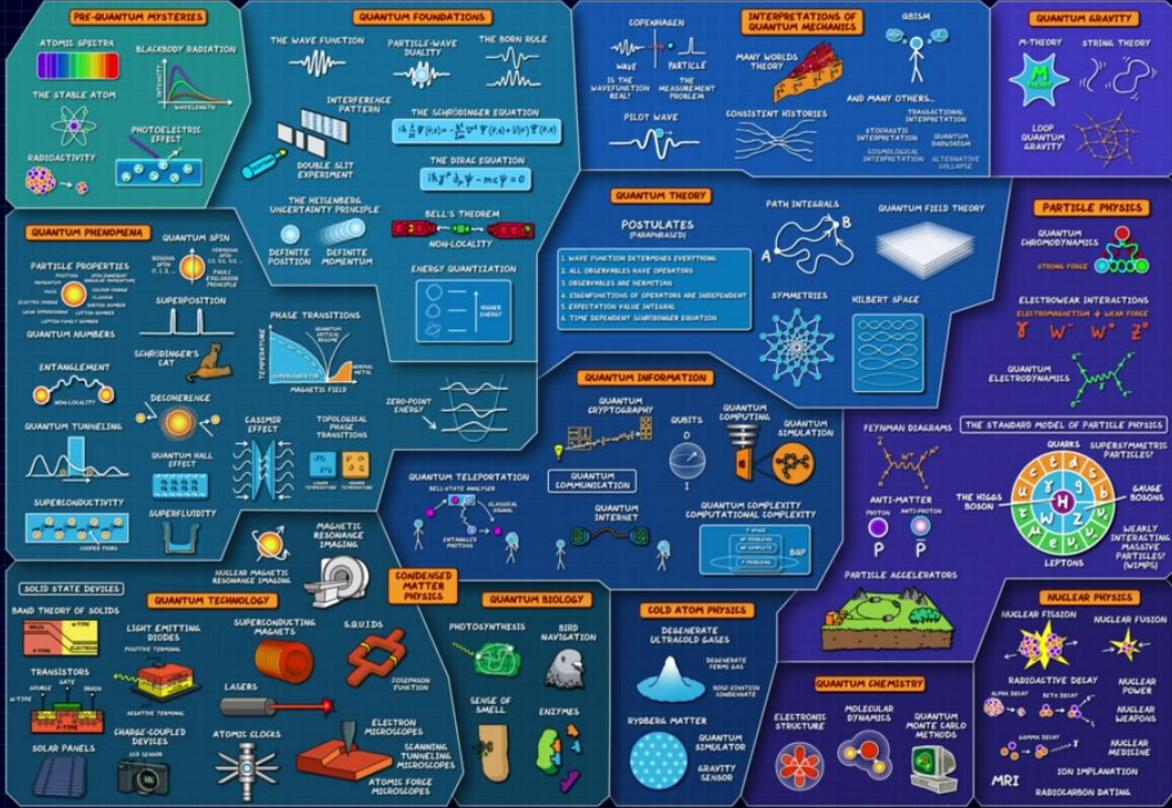


BLACK HOLES



COSMIC MICROWAVE BACKGROUND

# THE MAP OF QUANTUM PHYSICS



# Quantum Mechanics in Textbooks



## 1 CORPUSCOLI E ONDE: DUE MODELLI PER I FENOMENI

Un **corpuscolo**, o particella, è un ente a cui possiamo attribuire in ogni istante una posizione; l'insieme delle posizioni assunte nel tempo costituisce la traiettoria di un corpuscolo. Le leggi della dinamica ci permettono di descrivere la legge oraria del corpuscolo, una volta che sono note le forze che agiscono su di esso.

Un **onda** è un fenomeno di propagazione di una perturbazione, soggetta al principio di sovrapposizione: dove agiscono due perturbazioni, la perturbazione risultante è la somma algebrica delle perturbazioni concorrenti. Questo dà luogo ai fenomeni di interferenza e diffrazione, caratteristici dei fenomeni ondulatori.

Abbiamo usato questi modelli, in modo più o meno esplicito, per interpretare molti fenomeni fisici: i moti di oggetti diversi, spesso considerandoli come particelle puntiformi dotate di massa (anche quando erano pianeti o stelle); gli urti tra oggetti, sempre utilizzando il modello del corpuscolo; un modello per l'atomo come costituito da piccole particelle cariche, gli elettroni e i protoni, e neutri, i neutroni; il suono, interpretandolo come onde di pressione che si propagano in un mezzo materiale; la luce, interpretandola come onde elettromagnetiche, cioè onde dei campi elettrico e magnetico (decisivo per l'interpretazione della luce come un'onda è stato l'esperimento di Young che evidenzia il fenomeno di interferenza).

Tra la fine del XIX secolo e i primi decenni del XX, tuttavia, una serie di risultati sperimentali e modelli teorici mettono in discussione alcuni risultati precedenti:

- in alcuni esperimenti la luce mostra comportamenti che non si riescono a interpretare con un modello ondulatorio e si spiegano invece con un modello corpuscolare;
- in alcuni esperimenti gli elettroni mostrano fenomeni di interferenza, che potrebbero essere descritti con un modello ondulatorio.

In 3 minuti

- $E = hf$
- Il principio di indeterminazione



Elenchiamo alcuni di questi risultati, che poi discuteremo nel dettaglio:

Metà dell'Ottocento	Gli spettri di emissione di diversi elementi chimici, mostrano righe separate, invece che spettri continui.
1887	Hertz descrive l'effetto fotoelettrico (Lenard nel 1902 lo farà in modo più quantitativo) in base al quale la luce che colpisce un metallo provoca l'emissione di elettroni.
Fine dell'Ottocento	Non si riesce a derivare una legge che descriva lo spettro di emissione della radiazione del corpo nero.
1900	Planck ottiene una legge che descrive i dati sull'emissione del corpo nero basandosi sull'ipotesi che la luce venga assorbita e emessa dagli atomi sotto forma di pacchetti discreti di energia (corpuscoli).
1905	Einstein interpreta l'effetto fotoelettrico ipotizzando che la luce sia composta da corpuscoli.
1913	Bohr propone un modello atomico che comprende gli spettri a righe, ipotizzando che gli elettroni in un atomo abbiano alcune proprietà ondulatorie.
1914	Esperimento Franck-Hertz: un atomo può assorbire quantità di energia solo se queste sono multiple di un valore fondamentale.
1923	L'effetto Compton, in base al quale la luce che incide su un elettrone rimbaltza cambiando frequenza, viene interpretato considerando la luce come composta da corpuscoli.
1927	Esperimento di Davisson-Germer: gli elettroni che passano attraverso un cristallo di nichel mostrano una figura di interferenza come se fossero onde.

Il quadro fornito da questi risultati fu raccolto da Bohr nel cosiddetto **principio di complementarità**:

sia la radiazione che le particelle esibiscono proprietà ondulatorie o caratteristiche corpuscolari a seconda dell'apparato sperimentale con cui interagiscono.

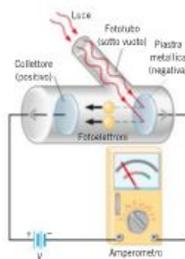
Questo principio cercava di spiegare i nuovi fenomeni osservati tenendo insieme il modello corpuscolare e quello ondulatorio. Come vedremo al termine del capitolo, il principio di complementarità è stato poi superato dallo sviluppo concettuale successivo della fisica quantistica.

## 2 L'EFFETTO FOTOELETTRICO E I FOTONI

### L'effetto fotoelettrico

Figura 1

Nell'effetto fotoelettrico, una superficie metallica emette elettroni quando è illuminata da un fascio di luce di frequenza sufficientemente elevata. Questi fotoelettroni possono essere raccolti su una piastra positiva, producendo una corrente.



L'effetto fotoelettrico fu studiato sistematicamente negli ultimi anni dell'Ottocento dal fisico tedesco Philipp Lenard (1862-1947). La figura 1 mostra l'apparato sperimentale: un fascio di luce incide su una piastra metallica, racchiusa all'interno di un tubo in cui è stato praticato il vuoto. La superficie del metallo emette elettroni, che si muovono verso un elettrodo positivo, chiamato **collettore**, e producono una corrente di elettroni rilevabile con un amperometro. Tali elettroni, estratti con l'ausilio della luce, vengono chiamati **fotoelettroni**.

Per misurare l'energia cinetica massima posseduta dagli elettroni emessi dal metallo si può

applicare una differenza di potenziale variabile e di segno opposto, che invece di attirare gli elettroni verso il collettore li respinga: il valore minimo  $V_{stop}$  della ddp per cui la corrente si annulla è detto potenziale di arresto. Il lavoro compiuto dal campo elettrico per fermare gli elettroni è numericamente uguale all'energia cinetica degli elettroni più energetici:  $eV_{stop} = K_{max}$ . In questo modo misurando  $V_{stop}$  si può ricavare  $K_{max}$ .

Se si misura l'energia cinetica massima dei fotoelettroni al variare dell'intensità e della frequenza della luce incidente, si osservano le seguenti caratteristiche:

- esiste una frequenza minima  $f_0$ , detta frequenza di soglia, al di sotto della quale non vengono emessi elettroni qualunque sia il valore dell'intensità della luce incidente;
- al di sopra della frequenza di soglia,  $K_{max}$  dipende linearmente dalla frequenza (figura 2) e non dipende dall'intensità;
- per un valore fissato della frequenza l'intensità di corrente cresce con l'intensità della luce incidente.

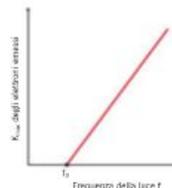


Figura 2

I fotoni possono espellere gli elettroni da un metallo quando la frequenza della luce supera un valore minimo  $f_0$ . Per frequenze superiori, gli elettroni emessi hanno un valore massimo di energia cinetica  $K_{max}$  che dipende linearmente dalla frequenza, come mostra il grafico.

### Difficoltà interpretative

Nel suo complesso, l'effetto fotoelettrico si potrebbe spiegare così: la radiazione elettromagnetica colpisce l'elettrone trasferendogli la sua energia; con questa energia l'elettrone può sfuggire all'attrazione del reticolo cristallino del metallo.

Se però si interpreta l'effetto fotoelettrico utilizzando il modello ondulatorio per la radiazione incidente, i risultati sperimentali lasciano alcuni dubbi:

- non si capisce perché debba esistere una frequenza di soglia; la potenza trasportata da un'onda è infatti proporzionale al quadrato della sua ampiezza: così se la radiazione incide su un elettrone per un tempo sufficientemente lungo, dovrebbe riuscire comunque a trasferire all'elettrone l'energia necessaria per farlo uscire dal metallo;
- non si capisce perché l'energia cinetica massima dei fotoelettroni dipenda solo dalla frequenza della radiazione incidente e non dalla sua intensità, dalla quale dipende l'energia trasportata dalla radiazione.

### L'ipotesi del fotone

Nel 1905 Einstein ipotizzò che la luce di frequenza  $f$  potesse essere considerata come un insieme di particelle, che in seguito vennero chiamate **fotoni**, ciascuno con un'energia:

$$\text{Energia di un fotone} \quad E = hf \quad [1]$$

dove  $h$  è la costante di Planck.

Secondo questa ipotesi, quando aumenta l'intensità della luce, aumenta il numero di fotoni ma l'energia di ciascuno di essi rimane invariata.

Einstein utilizzò l'ipotesi del fotone per spiegare le caratteristiche dell'effetto fotoelettrico. Secondo Einstein, quando la luce colpisce un metallo un fotone può cedere la propria energia a un elettrone del metallo: se questa energia è maggiore o uguale al lavoro necessario per estrarre l'elettrone dal metallo, l'elettrone viene emesso.

Il lavoro minimo  $W_0$  per estrarre un elettrone è detto **lavoro di estrazione** e dipende dal metallo. Ma quanto vale l'energia cinetica massima  $K_{max}$  di un fotoe-

lettrone che fuoriesce dal metallo? Einstein applicò il principio di conservazione dell'energia e propose la seguente relazione per le grandezze coinvolte nell'effetto fotoelettrico:

$$hf = K_{\max} + W_0 \quad [2]$$

dove  $hf$  è l'energia del fotone,  $K_{\max}$  l'energia cinetica massima del fotoelettrone e  $W_0$  il lavoro di estrazione del metallo.

In base all'equazione [2], l'energia cinetica massima di un fotoelettrone risulta:

$$K_{\max} = hf - W_0$$

Ora siamo in grado di interpretare meglio il grafico di figura 2. Sappiamo che la frequenza di soglia  $f_0$  è la minima frequenza che la luce incidente deve avere per strappare un elettrone al metallo. In questo caso particolare, il fotoelettrone viene emesso con energia cinetica nulla, così l'energia del fotone  $hf_0$  risulta uguale al lavoro di estrazione  $W_0 = hf_0 - W_0$ . La frequenza di soglia risulta dunque  $f_0 = W_0/h$ . Per valori di  $f$  minori di  $f_0$ ,  $K_{\max}$  è negativa ed è per questo che non si ha emissione di elettroni; per valori di  $f$  maggiori di  $f_0$ , invece,  $K_{\max}$  cresce linearmente con  $f$ .

Il fatto che un solo fotone interagisca con un solo elettrone spiega perché l'energia cinetica dei fotoelettroni non dipende dall'intensità. L'aumento dell'intensità della luce, infatti, provoca soltanto l'aumento del numero dei fotoni, ma l'energia che essi trasportano e che possono trasferire agli elettroni del metallo dipende solo dalla frequenza.

**RICORDA****Lavoro di estrazione**

Il lavoro di estrazione di un metallo è l'energia minima richiesta per espellere un elettrone dal metallo stesso. Un elettrone che ha ricevuto questa energia ha energia cinetica nulla.

**Esempio 1 L'effetto fotoelettrico per una superficie di argento**

Il lavoro di estrazione dell'argento è  $W_0 = 4,73$  eV.

- Determina la frequenza minima che la luce deve possedere per estrarre elettroni dalla sua superficie.

**La soluzione**

Poiché  $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , il lavoro di estrazione espresso in joule è

$$W_0 = (4,73 \text{ eV}) \left( \frac{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right) = 7,57 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La frequenza di soglia  $f_0$  è la frequenza per cui l'energia del fotone è uguale al lavoro di estrazione  $W_0$  del metallo. Usando l'equazione [2] con  $K_{\max} = 0$ , otteniamo

$$hf_0 = W_0 \rightarrow f_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{7,57 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}} = \boxed{1,14 \cdot 10^{15} \text{ Hz}}$$

che corrisponde a una lunghezza d'onda  $\lambda_0 = 263 \text{ nm}$ , nella regione ultravioletta dello spettro.

**Esempio 2 La massima velocità dei fotoelettroni**

Una luce monocromatica con una lunghezza d'onda di  $95 \text{ nm}$  colpisce una superficie di selenio, che ha un lavoro di estrazione di  $5,9 \text{ eV}$ . Gli elettroni emessi hanno un'energia cinetica diversa da zero.

- Determina la massima velocità con cui gli elettroni vengono espulsi.

**La soluzione**

L'energia cinetica massima  $K_{\max}$  dei fotoelettroni è  $K_{\max} = (1/2)mv_{\max}^2$ , da cui si ottiene l'equazione

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}}$$

dove  $m$  è la massa dell'elettrone, che vale  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

Dal principio di conservazione dell'energia  $hf = K_{\max} + W_0$  ricaviamo

$$K_{\max} = hf - W_0$$

Sappiamo che  $f\lambda = c$ , da cui segue

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

Combinando i vari passaggi si ottiene algebricamente

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}} = \sqrt{\frac{2(hf - W_0)}{m}} = \sqrt{\frac{2\left(h\frac{c}{\lambda} - W_0\right)}{m}}$$

Numericamente risulta

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2\left[2\left(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}\right) \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{95 \cdot 10^{-9} \text{ m}} - (5,9 \text{ eV}) \frac{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}}\right]}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = \boxed{1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}}$$

Si noti che nel calcolo abbiamo convertito il lavoro di estrazione da elettronvolt a joule ( $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ).

**La quantità di moto di un fotone**

Abbiamo visto che il fotone può interagire con un elettrone come se fosse una particella. Il fotone però è una particella molto particolare: nel vuoto si muove sempre alla velocità della luce  $c$  ed è privo di massa. Di conseguenza l'energia totale di un fotone coincide con la sua energia cinetica, perché la sua energia a riposo è uguale a zero.

Se consideriamo la relazione tra energia e quantità di moto ottenuta in relatività

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

osserviamo che per una particella di massa nulla la quantità di moto è  $p = \frac{E}{c}$ , che nel caso di un fotone diventa  $p = \frac{hf}{c}$ . Anche per il fotone questa grandezza ha carattere vettoriale e la sua direzione e verso sono quelle del fascio di luce.

**Esempio 3 Quanti fotoni spara una lampadina?**

Un LED da  $6 \text{ W}$  converte energia elettrica in energia luminosa con un rendimento pari a circa il 21%. Supponiamo che la luce sia verde (lunghezza d'onda nel vuoto =  $555 \text{ nm}$ ).

- Determina il numero di fotoni emessi dal LED ogni secondo.

**La soluzione**

Il numero di fotoni emessi al secondo può essere ottenuto dividendo la quantità di energia luminosa emessa ogni secondo per l'energia  $E$  di un fotone. L'energia del singolo fotone vale  $E = hf$ . La frequenza  $f$  del fotone è legata alla sua lunghezza d'onda  $\lambda$ , ovvero  $f = c/\lambda$ .

Poiché  $f = c/\lambda$ , l'energia di un fotone con  $\lambda = 555 \text{ nm}$  è

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{555 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3,58 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Ogni secondo un LED da 6 W con un rendimento del 21% emette  $0,21 \cdot (6,0 \text{ J/s}) = 1,3 \text{ J/s}$  di energia luminosa. Quindi

$$\begin{aligned} \text{numero di fotoni emessi al secondo} &= \frac{\text{energia luminosa emessa al secondo}}{\text{energia di un fotone}} = \\ &= \frac{1,3 \text{ J/s}}{3,58 \cdot 10^{-19} \text{ J/fotone}} = \boxed{3,6 \cdot 10^{18} \text{ fotoni/s}} \end{aligned}$$

### 3 LA RADIAZIONE DI CORPO NERO E L'IPOTESI DI PLANCK

Storicamente l'idea che l'interazione tra radiazione e materia avvenisse per pacchetti discreti di energia e non in modo continuo è legata allo studio dello spettro di emissione di un corpo nero.

Tutti i corpi, qualunque sia la loro temperatura, emettono continuamente onde elettromagnetiche. Per determinare le caratteristiche di questa emissione, alla fine dell'Ottocento i fisici iniziarono a studiare in modo sistematico le proprietà di emissione della radiazione elettromagnetica da parte di un **corpo nero**.

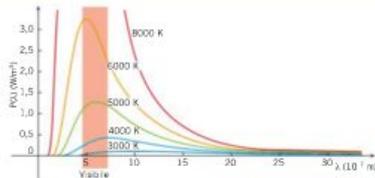
Come abbiamo già visto, un corpo nero è un oggetto qualsiasi che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica che lo colpisce. Per effettuare misure in laboratorio si realizza un corpo nero mediante una cavità, le cui pareti sono mantenute a temperatura uniforme e costante. Le pareti assorbono e riemettono le radiazioni elettromagnetiche di tutte le lunghezze d'onda. Attraverso un foro si analizza la radiazione nella cavità: per mezzo di opportuni strumenti, si misura l'energia presente per ogni lunghezza d'onda.

In questo modo si ottengono le curve di distribuzione dell'energia nella radiazione di corpo nero di **figura 3**, che confermano quanto previsto dalla termodinamica:

la distribuzione dell'energia nella radiazione di corpo nero non dipende dal materiale di cui è costituito ma solo dalla temperatura delle pareti.

Figura 3

La radiazione elettromagnetica emessa da un corpo nero ideale ha un irraggiamento per unità di lunghezza d'onda  $P(\lambda)$  che varia con la lunghezza d'onda nel modo indicato in figura. A temperature più elevate, l'intensità spettrale è maggiore e il massimo si verifica a lunghezze d'onda inferiori.



### Caratteristiche della radiazione di corpo nero

Analizzando le curve sperimentali, si notano due importanti caratteristiche della radiazione di corpo nero.

1. All'aumentare della temperatura del corpo nero, aumenta l'area sottesa dalla curva. Poiché questa area è proporzionale all'energia totale emessa, ne deriva che un corpo nero irradia tanta più energia quanto più è elevata la sua temperatura. Si dimostra infatti che vale la **legge di Stefan-Boltzmann**, secondo la quale

l'energia irradiata in 1 s da una superficie di  $1 \text{ m}^2$  di un corpo che si trova alla temperatura assoluta  $T$  è:

$$E = \sigma T^4$$

dove  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J}/(\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$  è detta **costante di Stefan-Boltzmann**.

2. All'aumentare della temperatura assoluta  $T$  del corpo nero, la lunghezza d'onda  $\lambda_{\text{max}}$  per la quale si ha il massimo dell'energia irradiata si sposta verso lunghezze d'onda minori, secondo quanto stabilisce la **legge di spostamento di Wien**:

$$\lambda_{\text{max}} T = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

La luminosità dei corpi molto caldi è dovuta al fatto che essi emettono onde elettromagnetiche nella regione del visibile. Per esempio, il Sole, che ha una temperatura superficiale di circa 6000 K, appare giallo, mentre la stella Betelgeuse (2900 K) si presenta rossa-arancione.

A temperature più basse gli oggetti emettono solo debolmente nel visibile e, di conseguenza, non appaiono più luminosi. Per esempio, il corpo umano, che ha una temperatura di 310 K, emette, onde elettromagnetiche nella regione degli infrarossi, che possono essere rivelati da uno strumento a essi sensibile (**figura 4**).

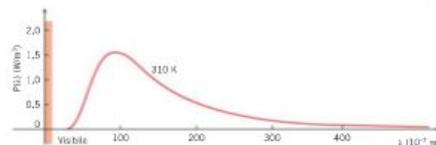


Figura 4

La distribuzione della radiazione emessa da un corpo nero di 310 K. La quantità di energia emessa nel visibile ( $4,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ) è assolutamente trascurabile rispetto a quella emessa nell'infrarosso.

#### ■ L'ANGOLO MATEMATICO

Lo spettro di emissione di un oggetto è una *distribuzione* che rappresenta in che modo l'irraggiamento complessivo delle onde elettromagnetiche emesse è distribuita tra le varie lunghezze d'onda (o, in alternativa, frequenze).

L'irraggiamento ha unità  $\frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ , perché indica l'energia emessa ogni secondo da ogni metro quadrato di superficie.

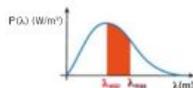
Lo spettro  $P(\lambda)$  rappresenta l'irraggiamento per unità di lunghezza d'onda (o densità di irraggiamento) e ha unità  $\frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}}$ . Questo significa che la quantità  $P(\lambda)$  da sola non ha un vero significato fisico, al contrario del prodotto  $P(\lambda) \cdot \Delta\lambda$ , che rappresenta l'irraggiamento per lunghezze d'onda comprese tra

$\lambda$  e  $\lambda + \Delta\lambda$  (l'unità di misura di  $P(\lambda) \cdot \Delta\lambda$  è infatti  $\frac{W}{m^2} \cdot m = \frac{W}{m^2}$ , la stessa dell'irraggiamento).

Considerando un intervallo generico  $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$ , l'irraggiamento in tale intervallo è dato da

$$I_{\lambda_{\min}; \lambda_{\max}} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} P(\lambda) \cdot \Delta\lambda$$

e corrisponde all'area sottesa dallo spettro nell'intervallo considerato.



L'irraggiamento complessivo dell'oggetto quindi è dato dall'area totale sottesa dallo spettro.

### L'ipotesi di quantizzazione di Planck

Negli ultimi anni dell'Ottocento i fisici cercarono di derivare la distribuzione di corpo nero utilizzando le equazioni di Maxwell, ma si scontrarono con difficoltà insormontabili. Infatti le leggi della fisica classica prevedono che, a una fissata temperatura, l'energia irradiata aumenti all'aumentare della frequenza (e quindi al diminuire della lunghezza d'onda) contrariamente a quanto mostrano le curve sperimentali e a quanto impone il principio di conservazione dell'energia.

Questa incompatibilità tra figura classica e evidenze sperimentali venne chiamata «catastrofe ultravioletta».

Nel 1900 il fisico tedesco Max Planck (1858-1947) affrontò il problema in modo radicalmente nuovo e riuscì a derivare l'espressione analitica della distribuzione di corpo nero facendo questa ipotesi:

**L'interazione fra radiazione e materia avviene per scambio di pacchetti discreti di energia, detti quanti.**

Planck fece uso di un modello in cui il corpo nero è composto da un gran numero di oscillatori atomici (cioè atomi che si comportano come oscillatori armonici), ciascuno dei quali emette e assorbe onde elettromagnetiche. Per ottenere l'accordo tra curve teoriche e sperimentali, Planck ipotizzò che l'energia  $E$  di un oscillatore atomico (\*) avesse solo i valori discreti  $E = hf, 2hf, 3hf$  e così via. In altre parole, egli suppose che:

$$E = nhf \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad [3]$$

dove  $n$  è un numero naturale,  $f$  è la frequenza della radiazione e  $h$  una costante.

Oggi sappiamo che  $h$ , detta **costante di Planck**, è una delle costanti fondamentali della fisica e vale

$$h = 6,626\,068\,76 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

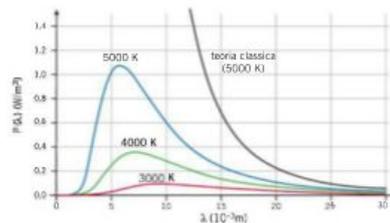
L'idea radicalmente nuova di Planck è che l'energia di un oscillatore atomico non è una grandezza continua, cioè in grado di assumere qualsiasi valore, ma è **quantizzata**, cioè può assumere solo valori discreti ( $hf, 2hf, 3hf$  ecc.).

La conservazione dell'energia richiede che l'energia trasportata dalle onde elettromagnetiche sia uguale a quella persa dagli oscillatori atomici del modello

(\*) Attualmente è noto che l'energia di un oscillatore armonico vale  $E = (n + 1/2)hf$ , ma il termine aggiuntivo  $1/2$  non è fondamentale per la nostra discussione.

di Planck. Supponiamo, per esempio, che un oscillatore con energia  $3hf$  emetta un'onda elettromagnetica. Secondo la fisica classica, l'energia dell'onda emessa può assumere un qualsiasi valore tra 0 e  $3hf$ . Al contrario, nel modello di Planck l'energia dell'onda può essere solo uno di questi valori:  $hf, 2hf, 3hf$ .

Il risultato è una curva in accordo con i dati sperimentali perché, a differenza della previsione classica (vedi figura 5), tende a zero per piccole lunghezze d'onda evitando così la «catastrofe ultravioletta».



Lo stesso Planck riteneva che la sua ipotesi fosse solo un artificio di calcolo e che la sua base fisica, cioè la quantizzazione dell'energia, non fosse fondata. In realtà pochi anni dopo il modello proposto da Einstein per l'effetto fotoelettrico riprese la stessa idea e aprì la strada a una rivoluzione concettuale (figura 6).



Figura 5

Spettro di emissione di un corpo nero a diverse temperature. Nelle curve continue secondo il modello di Planck a differenza di quelle previste dalla teoria classica, l'intensità tende a zero per piccole lunghezze d'onda.

Figura 6

Un termometro a raggi infrarossi determina la temperatura di un oggetto misurando una porzione dello spettro di emissione.

## 4 LA QUANTITÀ DI MOTO DI UN FOTONE E L'EFFETTO COMPTON

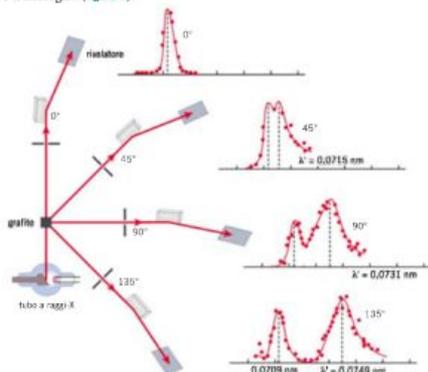
Einstein propose l'ipotesi del fotone nel 1905, ma solo nel 1923 essa cominciò a essere universalmente accettata, quando il fisico americano Arthur H. Compton (1892-1962) la utilizzò per spiegare i risultati sperimentali delle sue ricerche sulla diffusione dei raggi X da parte degli elettroni della grafite.

Secondo il modello ondulatorio della luce i raggi X sono onde elettromagnetiche ad alta frequenza. Quando colpiscono un elettrone questo dovrebbe oscillare con la stessa frequenza dell'onda che lo ha investito e poi emettere a sua volta un'onda sferica, sempre della stessa frequenza. Un rivelatore, posto in qualunque direzione in uscita dal bersaglio di grafite, dovrebbe così ricevere raggi X con la stessa frequenza usata per bombardare il bersaglio.

Quello che si osserva in realtà è molto diverso. A ogni angolo si rilevano raggi X che hanno due frequenze diverse: una parte della radiazione rilevata ha la stessa frequenza della radiazione incidente, una parte ha invece una frequenza minore (quindi lunghezza d'onda maggiore), diversa a seconda dell'angolo tra il rivelatore e il bersaglio (figura 7).

Figura 7

Lo spettro in lunghezza d'onda dei raggi X diffusi da un bersaglio di grafite. A ogni angolo, oltre alla componente con la stessa lunghezza d'onda  $\lambda_0$  della radiazione incidente, è presente una componente di lunghezza d'onda  $\lambda' > \lambda_0$ .



Anche in questo caso il modello corpuscolare della luce permette l'interpretazione del fenomeno osservato: vediamo come.

L'interazione tra un fotone e un elettrone può essere analizzata come urto elastico tra due corpi, durante il quale si conservano l'energia cinetica e la quantità di moto totali. Si suppone che l'elettrone sia inizialmente fermo e sostanzialmente libero, ovvero non vincolato agli atomi del materiale cui appartiene. In base al principio di conservazione dell'energia si ha

$$hf = hf' + K \quad [4]$$

dove  $K$  è l'energia cinetica del fotone dopo l'urto e si è usata la relazione  $E = hf$  per le energie dei fotoni. Ne deriva che  $hf' = hf - K$ , cioè che l'energia e la corrispondente frequenza  $f'$  del fotone diffuso sono inferiori a quelle del fotone incidente, proprio come osservato da Compton. Poiché  $\lambda' = cf'$ , la lunghezza d'onda del raggio X diffuso è maggiore rispetto a quella del raggio X incidente.

Nell'ipotesi in cui l'elettrone sia inizialmente fermo, la conservazione della quantità di moto totale richiede che

$$\text{quantità di moto del fotone incidente} = \text{quantità di moto del fotone diffuso} + \text{quantità di moto dell'elettrone} \quad [5]$$

Per ottenere un'espressione per il modulo  $p$  della quantità di moto di un fotone, ricordiamo che l'energia e la quantità di moto di una particella sono legate dalla relazione  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ . Un fotone ha massa nulla ( $m = 0$  kg), quindi la sua quantità di moto è

$$p = \frac{E}{c}$$

Poiché  $E = hf$  e  $c = \lambda f$ , la quantità di moto di un fotone di frequenza  $f$  è

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{\lambda f} = \frac{h}{\lambda} \quad [6]$$

Poiché la quantità di moto è una grandezza vettoriale, facendo riferimento alla figura 8 la conservazione della quantità di moto totale si può scrivere

$$\frac{h}{\lambda} \hat{x} = \left( \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + m_e v_e \cos \phi \right) \hat{x} + \left( -\frac{h}{\lambda'} \sin \theta + m_e v_e \sin \phi \right) \hat{y} \quad [7]$$

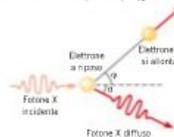


Figura 8

In un esperimento eseguito da Arthur H. Compton, un fotone X urta un elettrone fermo. Il fotone diffuso e l'elettrone si allontanano lungo direzioni differenti.

La conservazione dell'energia è data invece da questa espressione:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{1}{2} m_e v_e^2 \quad [8]$$

Le equazioni [7] e [8] ci permettono di ricavare la relazione tra la lunghezza d'onda del fotone incidente  $\lambda$ , la lunghezza d'onda del fotone diffuso  $\lambda'$  e l'angolo di diffusione  $\theta$ :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \quad [9]$$

dove  $m$  è la massa dell'elettrone. La quantità  $h/(mc)$  viene chiamata **lunghezza d'onda Compton** dell'elettrone e ha il valore  $h/(mc) = 2,43 \cdot 10^{-12}$  m. Dal momento che  $\cos \theta$  è compreso tra +1 e -1, la variazione di lunghezza d'onda  $\lambda' - \lambda$  può andare da 0 a  $2h/(mc)$ , a seconda del valore di  $\theta$ , un fatto che Compton aveva osservato.

La presenza di raggi X della stessa frequenza del fascio incidente è dovuta agli urti contro gli elettroni più interni, fortemente legati all'atomo. In questo caso a subire il rinculo è l'intero atomo, che ha una massa molto maggiore di quella dell'elettrone, e la lunghezza d'onda diffusa secondo la formula [9] è quasi identica a quella originale.

Nell'effetto Compton l'elettrone rimbalza poiché acquista una parte della quantità di moto del fotone. In linea di principio, dunque, la quantità di moto che i fotoni possiedono può essere usata per far muovere altri corpi. La figura 9 mostra un sistema di propulsione in via di studio per i viaggi ai confini del Sistema Solare che utilizza una larga vela. L'idea è che la luce solare, colpendo la vela, crei una forza in grado di spingere la navicella lontano dal Sole, nello stesso modo in cui il vento muove una barca a vela.

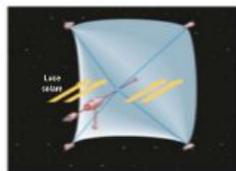


Figura 9

La luce solare che colpisce la vela solare fornisce la propulsione per questa navicella interstellare.

## 5 LA LUNGHEZZA D'ONDA DI DE BROGLIE E LA NATURA ONDULATORIA DEI CORPI MATERIALI



Figura 10

Se una particella in moto si muove, essa possiede energia, quantità di moto e lunghezza d'onda. La fotografia mostra un notevole ingrandimento del moscerino della frutta, ottenuto con un microscopio elettronico. Questo microscopio utilizza elettroni al posto della luce. La risoluzione dei dettagli è eccezionale perché la lunghezza d'onda di un elettrone può risultare molto inferiore rispetto a quella della luce visibile. I colori sono frutto di un'elaborazione grafica.

Gli esperimenti che abbiamo considerato finora mostrano la manifestazione del principio di complementarità per la luce.

L'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton forniscono una chiara evidenza del fatto che la luce può manifestare caratteristiche corpuscolari attribuibili ai pacchetti di energia chiamati fotoni. D'altro canto, l'interferenza e la diffrazione sono fenomeni in cui la luce si comporta come un'onda.

Nel 1923 il fisico francese Louis de Broglie (1892-1987) avanzò la sorprendente ipotesi che le particelle materiali possano manifestare un comportamento di tipo ondulatorio. Egli suppose che tutti i corpi materiali in movimento abbiano associata una lunghezza d'onda (figura 10) e che questa sia data dalla stessa relazione [6] che vale per un fotone:

$$\text{Lunghezza d'onda di de Broglie} \quad \lambda = \frac{h}{p} \quad [10]$$

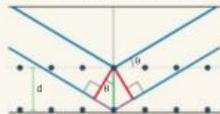
dove  $h$  è la costante di Planck e  $p$  è il modulo della quantità di moto relativistica della particella.

Oggi  $\lambda$  è nota come **lunghezza d'onda di de Broglie** della particella.

### Esempio 4 L'esperimento di Davisson e Germer

Nel 1927 i fisici americani Clinton J. Davisson e Lester H. Germer pensarono di verificare sperimentalmente l'ipotesi di de Broglie, cioè che a ogni particella fosse associata un'onda. Davisson e Germer inviarono un fascio di elettroni su un cristallo di nichel e osservarono che il fascio, riflesso dai piani del reticolo cristallino, produceva una figura di diffrazione.

In figura, i punti neri rappresentano le posizioni dei nuclei degli atomi nel reticolo cristallino. Gli elettroni (le linee blu) vengono mandati contro il cristallo in modo che la loro traiettoria formi un angolo  $\theta$  con la superficie. Gli elettroni possono essere riflessi dal primo piano cristallino (cioè la superficie del cristallo) oppure dal secondo piano cristallino, a distanza  $d$  dal primo.



Se in seguito alla riflessione gli elettroni riflessi dal primo piano interferiscono con quelli riflessi dal secondo, si può osservare a quali angoli  $\theta$  si ha un massimo di interferenza e a quali angoli si ha un minimo. Poiché i due fasci sono paralleli, quando interferiscono la differenza di cammino è data dai due tratti viola in figura.

► Esprimi la differenza di cammino  $\Delta s$  tra gli elettroni riflessi dal primo piano e quelli riflessi dal secondo in funzione della distanza reticolare  $d$  (il segmento verde) e dell'angolo di incidenza  $\theta$ .

- Esprimi la lunghezza d'onda degli elettroni in funzione dell'angolo  $\theta$  per cui si ha un massimo di interferenza.
- Sulla base della relazione di de Broglie, calcola l'espressione della lunghezza d'onda di un elettrone in funzione della differenza di potenziale usata per accelerarlo.

### La soluzione

- Ciascuno dei due tratti viola ha lunghezza  $d \sin \theta$ , quindi i due percorsi differiscono di una lunghezza

$$\Delta s = 2d \sin \theta$$

- Se i due fasci si incontrano in un rivelatore, dovremmo avere interferenza costruttiva quando la differenza di cammino è un multiplo della lunghezza d'onda ( $\Delta s = n\lambda$ ).

Il primo massimo è previsto quindi quando:

$$\lambda = 2d \sin \theta$$

- La lunghezza d'onda così ottenuta si può confrontare con quella prevista dalla formula di de Broglie. Una differenza di potenziale  $V$  fa raggiungere agli elettroni la velocità di

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

quindi una quantità di moto  $p = mv$  e infine una lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

Negli esperimenti è stato usato un fascio di elettroni accelerato con differenza di potenziale entro 300 V e le velocità raggiunte sono dell'ordine di 0,03c; possiamo quindi trascurare gli effetti relativistici e usare le relazioni classiche per energia e quantità di moto.

La lunghezza d'onda ricavata dalla figura di diffrazione degli elettroni coincide proprio con quella prevista dall'ipotesi di de Broglie.

Anche altre particelle diverse dagli elettroni possono manifestare proprietà ondulatorie. Per esempio, si usa la diffrazione di neutroni per studiare le strutture dei cristalli. La figura 11 paragona le figure di diffrazione da parte di un cristallo di sale (NaCl) ottenibili con neutroni e con raggi X.

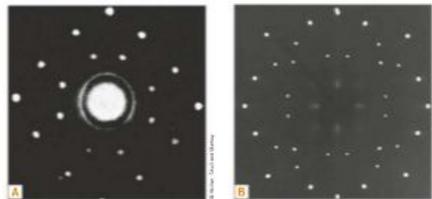


Figura 11

Figura di diffrazione con i neutroni (A) e con i raggi X (B) da parte di un cristallo di cloruro di sodio (NaCl).

Sebbene ogni particella in movimento possieda una lunghezza d'onda di de Broglie, gli effetti di tale lunghezza d'onda sono osservabili solo nel caso di particelle la cui massa sia molto piccola, dell'ordine, per esempio, di quella dell'elettrone o del neutrone.

### Esempio 5 Un elettrone e una pallina da tennis a confronto

Determina la lunghezza d'onda di de Broglie:

- ▶ di un elettrone (massa =  $9,1 \cdot 10^{-31}$  kg) in moto a una velocità di  $6 \cdot 10^6$  m/s;
- ▶ di una pallina da tennis (massa = 0,06 kg) in moto a una velocità di 13 m/s.

#### La soluzione

Le velocità sono piccole rispetto a quella della luce, quindi possiamo ignorare gli effetti relativistici ed esprimere la quantità di moto come il prodotto tra la massa e la velocità.

▶ Dall'equazione [10] otteniamo

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(6,0 \cdot 10^6 \text{ m/s})} = 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Una lunghezza d'onda di de Broglie di  $1,2 \cdot 10^{-10}$  m è più o meno uguale alle distanze interatomiche di un solido, come il cristallo di nichel usato da Davison e Germer, e, quindi, porta agli effetti di diffrazione osservati.

▶ Un calcolo simile a quello precedente mostra che la lunghezza d'onda di de Broglie di una pallina da tennis è  $\lambda = 8,5 \cdot 10^{-24}$  m. Questa lunghezza d'onda è notevolmente piccola, anche se paragonata con le dimensioni di un atomo ( $10^{-10}$  m) o di un nucleo ( $10^{-14}$  m). Quindi il rapporto  $\lambda/d$  tra questa lunghezza d'onda e la larghezza  $d$  di un'apertura ordinaria, come una finestra, è così piccolo che non è possibile osservare la diffrazione di una pallina da tennis da parte di una finestra.

## 6 ONDE DI PROBABILITÀ

Sia la luce sia le particelle si comportano in alcuni esperimenti come onde e in altri come corpuscoli.

In particolare, sia per la luce sia per le particelle possiamo dire che:

- la loro propagazione può essere prevista utilizzando un modello ondulatorio;
- la loro interazione con la materia (quindi anche con un rivelatore) si può descrivere bene con un modello corpuscolare.

In altri termini:

- possiamo calcolare con il modello ondulatorio dove troveremo massimi e minimi di interferenza sia per la luce che per le particelle;
- la misura dell'intensità dei massimi e dei minimi è in realtà un conteggio di interazioni corpuscolari (quanti fotoni o quanti elettroni interagiscono con il rivelatore).

L'equazione di de Broglie per la lunghezza d'onda di una particella non offre però alcuno spunto per capire di che tipo sia l'onda associata a una particella materiale. Per avere una prima idea della natura di tale onda, osserviamo la figura 12. La parte A mostra la figura a frange su uno schermo, ottenuta eseguendo

un esperimento di Young con la doppia fenditura con l'utilizzo di elettroni al posto della luce. Le frange chiare hanno luogo nei punti in cui le onde provenienti dalle fenditure interferiscono costruttivamente, mentre le frange scure corrispondono a zone in cui le onde interferiscono distruttivamente.

Quando un elettrone passa attraverso la doppia fenditura e colpisce lo schermo, il punto di arrivo diventa luminoso; le parti B, C e D della figura 12 illustrano il modo in cui questi punti diventano sempre più numerosi al passare del tempo. Con l'accumularsi degli elettroni sullo schermo, i punti luminosi finiscono per formare la figura a frange evidente nella parte D.

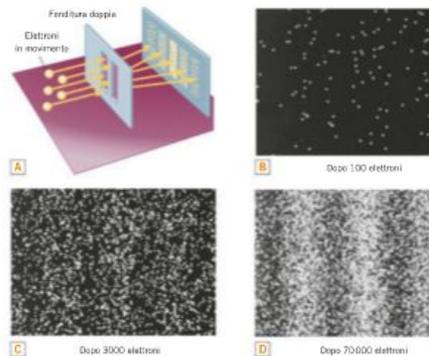


Figura 12

In questa versione dell'esperimento di Young che utilizza elettroni, la caratteristica figura a frange diventa evidente solo dopo che un numero sufficiente di elettroni ha colpito lo schermo (da A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki e H. Ezawa, *Am. J. Phys.* 57 (2): 117, Feb. 1989).

L'esperimento di Young con gli elettroni è stato ripetuto nel 1974 a Bologna da tre fisici italiani, Pier Giorgio Merli, Gian Franco Missiroli e Giulio Pozzi, che riuscirono a costruire un apparato in grado di far arrivare un solo elettrone alla volta sullo schermo. Anche loro ottennero una figura di interferenza, dimostrando che l'interferenza ottenuta non è causata dall'interferenza di una particella con un'altra ma dal comportamento ondulatorio dell'elettrone.

Le frange luminose si ottengono quindi dove esiste un'alta probabilità che gli elettroni colpiscano lo schermo, quelle scure dove la probabilità è bassa.

È questa la chiave per comprendere che cosa sono le onde associate alle particelle. **Le onde associate alle particelle sono onde di probabilità**, il cui valore in un determinato punto dello spazio fornisce un'indicazione della probabilità di trovare la particella in tale punto. Nella zona in cui è situato lo schermo, l'andamento della probabilità associato con le onde dà luogo alla figura a frange. Il fatto che non siano visibili frange nella parte B della figura non significa che lì non siano presenti onde di probabilità; semplicemente sono troppo pochi gli elettroni che hanno colpito lo schermo e la figura non è ancora riconoscibile.

La distribuzione di probabilità che porta alle frange della figura 12 è analoga a quella dell'intensità luminosa responsabile delle frange nell'originario esperimento di Young. Si è dimostrato che l'intensità della luce è proporzionale al quadrato dei campi elettrico o magnetico associati all'onda. In modo analogo, nel caso delle onde associate alle particelle la probabilità è proporzionale al quadrato

del modulo di una grandezza  $\psi$  (lettera greca «psi»), che viene chiamata **funzione d'onda** della particella.

Nel 1925 il fisico austriaco Erwin Schrödinger (1887-1961) e il fisico tedesco Werner Heisenberg (1901-1976) svilupparono in maniera indipendente due formulazioni teoriche per calcolare la funzione d'onda. Essi fondarono così una nuova branca della fisica chiamata **meccanica quantistica**. Il termine **quanto** si riferisce al fatto che su scala atomica, laddove occorre considerare le onde associate alle particelle, l'energia è quantizzata, in modo che solo certe particolari energie sono permesse.

La meccanica quantistica è essenziale per capire la struttura atomica e i fenomeni a essa collegati e l'equazione di Schrödinger per il calcolo della funzione d'onda è ormai largamente usata. Esploreremo la struttura dell'atomo basata sulle idee della meccanica quantistica nel prossimo capitolo.

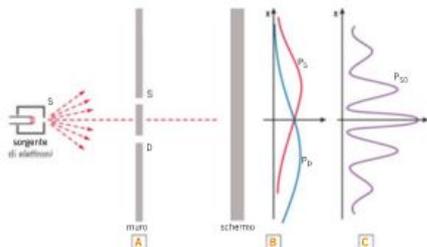
### L'esperimento influenza il risultato

L'interpretazione delle onde associate alle particelle come onde di probabilità ci permette di capire in che modo l'allestimento di un esperimento può influenzare il risultato.

Prepariamo un esperimento di Young con doppia fenditura per un fascio di elettroni in modo da poter aprire una, l'altra o entrambe le fenditure (figura 13):

Figura 13

- A. Un fascio di elettroni viene mandato contro una parete con una doppia fenditura.  
 B. Distribuzione degli elettroni ottenuta aprendo una sola fenditura alla volta.  
 C. Distribuzione degli elettroni ottenuta con entrambe le fenditure aperte.



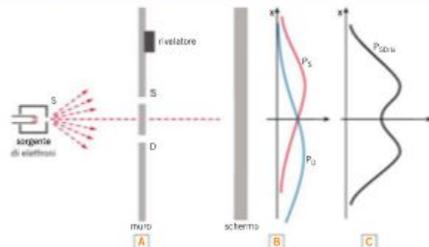
- la curva rossa rappresenta la distribuzione di intensità di elettroni che si ottiene aprendo solo la fenditura di sinistra;
- la curva blu rappresenta la distribuzione di intensità di elettroni che si ottiene aprendo solo la fenditura di destra;
- la curva viola rappresenta la distribuzione di intensità di elettroni che si ottiene aprendo entrambe le fenditure e *non* è uguale alla somma delle altre due curve.

La distribuzione degli elettroni sullo schermo indica che il fascio si propaga come un'onda. Solo nel momento in cui avviene l'interazione con lo schermo, l'elettrone si comporta come una particella puntiforme ed è possibile dire che «si trova in un punto».

Se ora inseriamo nell'esperimento un rivelatore per determinare da che fenditura passano gli elettroni, sullo schermo appare una figura diversa (figura 14). L'interazione con il rivelatore impone infatti all'elettrone di specificare la sua posizione e l'elettrone si comporta allora da particella. La curva di intensità che si ottiene (curva nera) è in questo caso data dalla somma delle due curve ottenute chiudendo una fenditura alla volta.

Figura 14

L'esperimento degli elettroni con doppia fenditura viene ripetuto con un dispositivo che permette di sapere da che fenditura è passato l'elettrone: in questo caso, la distribuzione che si ottiene è la somma delle due distribuzioni che si hanno con una sola fenditura aperta.



In fisica quantistica il **procedimento di misura** non è più separabile dal fenomeno fisico, nel senso che **concorrer a determinare le caratteristiche del sistema**: un fenomeno non può più essere descritto «in sé», ma in relazione al particolare modo scelto per osservarlo.

In particolare, nell'esempio analizzato l'elettrone si comporta come corpuscolo nella sua interazione con il rivelatore di fenditura o con lo schermo e si comporta come un'onda quando lasciato libero di propagarsi.

### ■ L'ANGOLO MATEMATICO

La descrizione matematica del comportamento degli elettroni si basa sulla funzione d'onda.

A ogni punto  $x$  dello schermo è associato il valore  $\psi(x)$  della funzione d'onda, ma l'unica grandezza osservabile è l'intensità di elettroni sullo schermo, che è proporzionale alla probabilità  $P(x)$  che un elettrone arrivi in quel punto, data da  $P(x) = |\psi_S(x)|^2$ .

Se apriamo solo la fenditura sinistra avremo una certa funzione d'onda  $\psi_S(x)$  e quindi

$$P_S(x) = |\psi_S(x)|^2$$

Se apriamo solo la fenditura destra avremo un'altra funzione d'onda e quindi

$$P_D(x) = |\psi_D(x)|^2$$

Se apriamo entrambe le fenditure la funzione d'onda sarà la somma dei due casi precedenti  $\psi_{SD}(x) = \psi_S(x) + \psi_D(x)$ , e la probabilità che l'elettrone arrivi in  $x$  è

$$P_{SD}(x) = |\psi_S(x) + \psi_D(x)|^2$$

che è diversa dalla somma delle due probabilità. Il fatto che la formula preveda di calcolare prima la somma e poi il modulo quadrato permette di avere anche interferenza distruttiva tra le onde di probabilità.

Se infine teniamo entrambe le fenditure aperte, ma con il rivelatore di fenditura presente, la funzione d'onda deve tener conto anche dell'interazione col rivelatore di fenditura e la probabilità di trovare l'elettrone in un certo punto dello schermo è la somma delle probabilità nei casi di singola fenditura:

$$P_{SDiv}(x) = |\psi_S(x)|^2 + |\psi_D(x)|^2 = P_S(x) + P_D(x)$$

## 7 IL PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE DI HEISENBERG

Il fatto che la propagazione di luce e particelle sia descrivibile in termini di onde di probabilità significa che i concetti di posizione, traiettoria e velocità vanno interpretati con molta più cautela di quanto non accada per gli oggetti macroscopici. Il principio di indeterminazione di Heisenberg che discutiamo in questo paragrafo è un modo per tenere conto di alcuni degli aspetti ondulatori nella propagazione delle particelle senza necessariamente abbandonare del tutto il linguaggio classico.

In base a quanto visto nel paragrafo precedente, le frange chiare della figura 12 corrispondono ai punti in cui la probabilità che un elettrone colpisca lo schermo è alta. Dal momento che è presente un certo numero di frange chiare, ciò significa che esiste un certo numero di punti dello schermo in cui questa probabilità è diversa da zero.

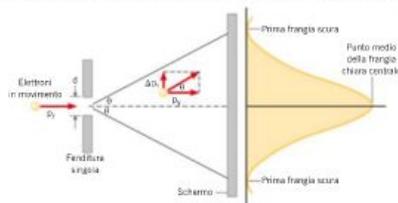
Non possiamo prevedere esattamente quale punto dello schermo verrà colpito dal singolo elettrone. Tutto ciò che possiamo fare è indicare la probabilità che l'elettrone vada a finire in un determinato punto. Non è più possibile affermare, come suggerito dalle leggi di Newton, che il singolo elettrone, inviato contro la doppia fenditura, proceda lungo una determinata traiettoria e colpisca un punto preciso dello schermo.

Questo semplice modello non funziona quando una particella di dimensioni paragonabili a quelle di un elettrone passa attraverso una coppia di fenditure ravvicinate. Poiché in tali circostanze diventa importante la natura ondulatoria delle particelle, si perde la possibilità di prevedere il percorso seguito dal singolo elettrone. Solo il comportamento medio di un elevato numero di particelle risulta prevedibile, mentre il comportamento della singola particella non è determinabile a priori.

Per analizzare più chiaramente la natura di questa indeterminazione, consideriamo degli elettroni inviati attraverso una fenditura singola, come in figura 15.

Figura 15

Quando un numero sufficiente di elettroni passa attraverso una fenditura singola e colpisce uno schermo, viene prodotta una figura a frange chiare e scure (qui viene mostrata solo la frangia centrale). Questa figura è dovuta alla natura ondulatoria dell'elettrone ed è analoga a quella prodotta dalle onde luminose.



Dopo che un numero sufficientemente elevato di elettroni avrà colpito lo schermo, emergerà una figura di diffrazione. La figura che riguarda gli elettroni consiste in un'alternanza di frange chiare e scure ed è analoga a quella associata alla diffrazione della luce. La figura 15 riproduce la fenditura e le prime frange scure da entrambi i lati della frangia chiara centrale. La frangia centrale è chiara perché in tutta la zona compresa tra le frange scure gli elettroni colpiscono lo schermo. Trascurando gli elettroni che colpiscono lo schermo al di fuori della frangia centrale, l'apertura angolare con cui gli elettroni vengono diffratti è fornita dall'angolo  $\theta$  riportato nella figura.

Per giungere nei punti appartenenti all'intervallo della frangia centrale alcuni elettroni devono aver acquisito una componente della quantità di moto lungo l'asse  $x$ , nonostante siano pervenuti sulla fenditura viaggiando lungo l'asse  $y$  e quindi siano privi di una quantità di moto iniziale lungo l'asse  $x$ . La figura mostra che la componente  $x$  della quantità di moto acquisita può valere al massimo  $\Delta p_x$ . Il simbolo  $\Delta p_x$  corrisponde alla differenza tra il massimo valore della quantità di moto acquisita dall'elettrone dopo il passaggio attraverso la fenditura e il suo valore nullo prima di attraversarla.  $\Delta p_x$  rappresenta quindi l'indeterminazione nella componente  $x$  della quantità di moto, in quanto tale componente può assumere tutti i valori compresi tra zero e  $\Delta p_x$ .

È possibile collegare  $\Delta p_x$  con la larghezza  $d$  della fenditura. Per farlo, supponiamo che l'equazione  $\sin \theta = m\lambda/d$ ,  $m = 1, 2, 3 \dots$ , applicabile alle onde luminose, sia utilizzabile anche per particelle con lunghezza d'onda di de Broglie  $\lambda$ . Tale equazione scritta per  $m = 1$ ,  $\sin \theta = \lambda/d$ , specifica l'angolo  $\theta$  che localizza la prima frangia scura. Se  $\theta$  è piccolo, allora  $\sin \theta = \tan \theta$ . Inoltre, la figura 15 indica che  $\tan \theta = \Delta p_x/p_y$ , dove  $p_y$  è la componente  $y$  della quantità di moto dell'elettrone. Quindi  $\Delta p_x/p_y = \lambda/d$ . Ma  $p_y = h/\lambda$  secondo l'equazione di de Broglie, in modo che

$$\frac{\Delta p_x}{p_y} = \frac{\Delta p_x}{h/\lambda} = \frac{\lambda}{d}$$

Di conseguenza

$$\Delta p_x = \frac{h}{d} \quad [11]$$

in cui si nota che minore è la larghezza della fenditura, maggiore risulta l'indeterminazione nella componente  $x$  della quantità di moto dell'elettrone.

Fu Heisenberg il primo a ipotizzare che l'indeterminazione  $\Delta p_x$  nella componente  $x$  della quantità di moto sia collegata all'indeterminazione nella componente  $x$  della posizione dell'elettrone che attraversa la fenditura. Siccome l'elettrone può attraversare la fenditura di larghezza  $d$  in un suo punto qualsiasi, l'indeterminazione nella componente  $x$  della posizione dell'elettrone è  $\Delta x = d$ . Sostituendo  $\Delta x$  a  $d$  nell'equazione [11] si ottiene che  $\Delta p_x \approx h/\Delta x$ , ovvero  $(\Delta p_x) \cdot (\Delta x) = h$ .

Il risultato ottenuto nel caso di un esperimento di diffrazione può essere generalizzato e assume la forma di principio, noto come **principio di indeterminazione di Heisenberg**.

$$\text{Quantità di moto e posizione } (\Delta p_x) \cdot (\Delta x) \geq \frac{h}{4\pi} \quad [12]$$

dove  $\Delta x$  è l'indeterminazione nella componente  $x$  della posizione di una particella e  $\Delta p_x$  è l'indeterminazione nella componente  $x$  della quantità di moto della particella.

Il principio di indeterminazione di Heisenberg fissa alcuni limiti alla precisione con cui posizione e quantità di moto di una particella possono essere contemporaneamente specificati. Tali limiti non sono semplicemente dovuti a tecniche di misurazione poco precise: essi sono limiti fondamentali imposti dalla natura e non è possibile «aggararli».

L'equazione [12] indica che  $\Delta p_x$  e  $\Delta x$  non possono essere entrambe arbitrariamente piccole. Se una delle due è piccola, l'altra deve essere grande, in modo che il loro prodotto sia maggiore o uguale a  $h/4\pi$ . Per esempio, se la posizione di una particella è esattamente nota, in modo che  $\Delta x$  sia zero, allora  $\Delta p_x$  risulta avere un valore «infinitamente grande» e quindi la quantità di moto della particella

è completamente indeterminata. Al contrario, se supponiamo che  $\Delta p_x$  sia zero, allora  $\Delta x$  che assume un valore «infinitamente grande» e la posizione della particella è del tutto indeterminata. In altre parole, il principio di indeterminazione di Heisenberg afferma che è impossibile specificare contemporaneamente con precisione assoluta sia la quantità di moto sia la posizione di una particella.

Esiste un principio di indeterminazione anche a proposito dell'energia e del tempo.

$$\text{Energia e tempo} \quad (\Delta E) \cdot (\Delta t) \geq \frac{h}{4\pi} \quad [13]$$

dove  $\Delta E$  è l'indeterminazione nell'energia di una particella che si trova in un determinato stato e  $\Delta t$  è l'indeterminazione nell'intervallo di tempo durante il quale la particella permane in quello stato.

Il prodotto delle indeterminazioni nell'energia  $\Delta E$  di una particella in un certo stato e nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  durante il quale la particella rimane in quello stato è maggiore o uguale a  $h/4\pi$ . Quindi l'indeterminazione nell'energia di una particella in un certo stato è tanto maggiore quanto più brevemente la particella si mantiene in tale stato.

**RICORDA****Osservazione sul principio di indeterminazione di Heisenberg**

Il principio di indeterminazione di Heisenberg afferma che il prodotto tra  $\Delta p_x$  e  $\Delta x$  è maggiore o uguale a  $h/4\pi$ . L'indeterminazione minima si ha quando tale prodotto vale  $h/4\pi$ .

**Esempio 6 Piccole e grandi masse**

Supponiamo che la posizione di un corpo lungo la direzione  $x$  sia nota con precisione tale da comportare un'indeterminazione nella posizione pari solo a  $\Delta x = 1,5 \cdot 10^{-11}$  m.

- ▶ Determina la minima indeterminazione nella quantità di moto del corpo.
- ▶ Stabilisci la corrispondente minima indeterminazione nella velocità del corpo nel caso in cui esso sia un elettrone ( $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg).
- ▶ Esegui lo stesso calcolo nel caso in cui il corpo sia una pallina da ping-pong di massa  $2,2 \cdot 10^{-3}$  kg.

**La soluzione**

- ▶ La minima indeterminazione nella componente  $x$  della quantità di moto è

$$\Delta p_x = \frac{h}{4\pi\Delta x} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{4\pi(1,5 \cdot 10^{-11} \text{ m})} = 3,5 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

- ▶ Dal momento che  $\Delta p_x = m\Delta v_x$ , la minima indeterminazione sulla velocità dell'elettrone è

$$\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{3,5 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 3,8 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Quindi la piccola indeterminazione nella componente  $x$  della posizione dell'elettrone dà luogo a un'elevata indeterminazione sulla sua velocità.

- ▶ L'indeterminazione nella velocità della pallina da ping-pong è

$$\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{3,5 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{2,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} = 1,6 \cdot 10^{-21} \text{ m/s}$$

Visto che la massa della pallina da ping-pong è relativamente grande, la piccola indeterminazione nella componente  $x$  della sua posizione dà luogo a un'indeterminazione nella sua velocità molto minore di quella dell'elettrone. Quindi, al contrario di quanto avviene per l'elettrone, possiamo sapere contemporaneamente dove si trova la palla e a che velocità si sta muovendo, con una precisione decisamente alta.

# Key concepts

## I CONCETTI FONDAMENTALI



GUARDA! i video  
Recap in English

### 1 CORPUSCOLI E ONDE: DUE MODELLI PER I FENOMENI

Dualismo onda-corpuscolo: un'onda può manifestare proprietà corpuscolari e una particella caratteristiche ondulatorie.

### 2 L'EFFETTO FOTOELETTRICO E I FOTONI

**Energia di un fotone:** la radiazione elettromagnetica è formata da fotoni, che sono pacchetti di energia. L'energia di un fotone è

$$E = hf$$

dove  $h$  è la costante di Planck e  $f$  è la frequenza del fotone.

Un fotone non ha massa e viaggia sempre con velocità pari a  $c$ .

**Effetto fotoelettrico o lavoro di estrazione:** l'effetto fotoelettrico è il fenomeno in cui la luce colpisce la superficie di un metallo estraendone elettroni. Il lavoro di estrazione  $W_0$  di un metallo è il minimo lavoro necessario per estrarre un elettrone dal metallo.

**Caratteristiche dell'effetto fotoelettrico**

- Un metallo emette fotoelettroni solo se la frequenza della luce incidente è superiore a un valore soglia  $f_0$ .
- L'energia cinetica massima dei fotoelettroni espulsi non varia quando l'intensità della luce aumenta e la sua frequenza resta costante.

**Conservazione dell'energia ed effetto fotoelettrico:** gli elettroni emessi dal metallo possono avere un'energia cinetica massima  $K_{max}$  legata all'energia  $hf$  del fotone incidente e al lavoro di estrazione  $W_0$  del metallo:

$$hf = K_{max} + W_0$$

### 3 LA RADIAZIONE DI CORPO NERO E L'IPOTESI DI PLANCK

**Corpo nero:** è un qualsiasi oggetto che, a temperatura costante, assorbe tutta la radiazione elettromagnetica che lo colpisce. La distribuzione dell'energia nella radiazione di corpo nero non dipende dal materiale di cui è costituito ma solo dalla temperatura delle pareti.

**Legge di Stefan-Boltzmann:** un corpo nero a temperatura assoluta  $T$  irradia in 1 s da 1 m<sup>2</sup> di superficie una energia totale

$$E = \sigma T^4$$

$\sigma$  = costante di Stefan Boltzmann =  $5,67 \cdot 10^{-8}$  J/(s · m<sup>2</sup> · K<sup>4</sup>)

**Ipotesi di quantizzazione di Planck:** l'interazione fra radiazione e materia avviene per scambio di pacchetti discreti di energia, detti *quanti*.

**Energie degli oscillatori atomici:** Planck ipotizzò che un corpo nero sia costituito da oscillatori atomici che possono avere solo energie quantizzate espresse da

$$E = nhf \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$h$  = costante di Planck =  $6,626\,068\,76 \cdot 10^{-34}$  J · s

$f$  = frequenza di vibrazione dell'oscillatore

### 4 LA QUANTITÀ DI MOTO DI UN FOTONE E L'EFFETTO COMPTON

**Quantità di moto di un fotone:** il modulo della quantità di moto di un fotone vale

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$h$  = costante di Planck

$\lambda$  = lunghezza d'onda del fotone

**Effetto Compton:** corrisponde alla diffusione di un fotone da parte di un elettrone di un determinato materiale. Il fotone diffuso ha una frequenza (e quindi un'energia) inferiore rispetto al fotone incidente.

**Variazione della lunghezza d'onda nell'effetto Compton:** la differenza fra la lunghezza d'onda  $\lambda'$  del fotone diffuso e la lunghezza d'onda  $\lambda$  del fotone incidente è legata all'angolo di diffusione  $\theta$  dalla relazione

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta)$$

dove  $m$  è la massa dell'elettrone. La quantità  $h/(mc)$  è detta *lunghezza d'onda Compton* dell'elettrone.

### 5 LA LUNGHEZZA D'ONDA DI DE BROGLIE E LA NATURA ONDULATORIA DEI CORPI MATERIALI

**Lunghezza d'onda di de Broglie di una particella**

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

dove  $h$  è la costante di Planck e  $p$  è il modulo della quantità di moto relativistica della particella.

### 7 IL PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE DI HEISENBERG

Fissa dei limiti alle possibilità di conoscere il comportamento di una particella.

È espresso dalla relazione (*quantità di moto e posizione*):

$$(\Delta p_x) \cdot (\Delta x) \geq \frac{h}{4\pi}$$

dove  $\Delta x$  è l'indeterminazione nella componente  $x$  della posizione di una particella e  $\Delta p_x$  è l'indeterminazione nella componente  $x$  della quantità di moto della particella.

Oppure può essere espresso dalla relazione (*energia e tempo*):

$$(\Delta E) \cdot (\Delta t) \geq \frac{h}{4\pi}$$

dove  $\Delta E$  è l'indeterminazione nell'energia della particella quando si trova in un determinato stato e  $\Delta t$  è l'indeterminazione nell'intervallo di tempo durante il quale la particella permane in quello stato.

**CAPITOLO 21 LA TEORIA ATOMICA****Competenze**

Comprendere le principali tappe del passaggio dalla fisica classica alla fisica moderna  
Conoscere e descrivere gli esperimenti che portarono alla scoperta dell'elettrone e della quantizzazione della carica elettrica  
Descrivere i limiti dell'interpretazione classica degli spettri a righe  
Conoscere e confrontare i modelli atomici

**Contenuti**

Dalla fisica classica alla fisica moderna  
Il moto browniano  
I raggi catodici e la scoperta dell'elettrone  
L'esperimento di Millikan e l'unità fondamentale di carica  
Gli spettri a righe  
I raggi X  
I primi modelli dell'atomo e la scoperta del nucleo

**Obiettivi minimi**

Illustrare l'esperimento di Thomson  
Illustrare l'esperimento di Millikan  
Conoscere la legge della diffrazione dei raggi X  
Conoscere i modelli atomici di Thomson e Rutherford

**Schede**

La fisica risponde *La tomografia assiale computerizzata*  
CLIL Physics *Synchrotron light*

**CAPITOLO 22 LA FISICA QUANTISTICA**

Competenze	Obiettivi minimi
<p>Argomentare l'ipotesi quantistica di Planck sulla radiazione del corpo nero</p> <p>Analizzare i singoli esperimenti, mostrare i limiti della spiegazione classica e la necessità di un'ipotesi di quantizzazione dell'energia</p> <p>Definire e descrivere i fotoni</p> <p>Descrivere le ipotesi di Bohr per il modello atomico e le caratteristiche del modello</p> <p>Applicare le ipotesi quantistiche nella risoluzione dei problemi</p> <p>Identificare e analizzare i comportamenti di onde e particelle</p> <p>Comprendere il significato del principio di indeterminazione di Heisenberg</p>	<p>Conoscere l'ipotesi di Planck sulla radiazione del corpo nero</p> <p>Comprendere l'effetto fotoelettrico</p> <p>Comprendere l'effetto Compton</p> <p>Definire energia e quantità di moto per i fotoni</p> <p>Conoscere le caratteristiche dell'atomo di Bohr</p> <p>Calcolare orbite, energie e spettri dell'atomo di idrogeno</p> <p>Conoscere i numeri quantici e il loro significato</p> <p>Calcolare l'indeterminazione su posizione o quantità di moto di una particella</p>

Programmazione didattica **13**

**CAPITOLO 22 LA FISICA QUANTISTICA**

Contenuti	Schede
<p>La radiazione del corpo nero e l'ipotesi di Planck</p> <p>I fotoni e l'effetto fotoelettrico</p> <p>La massa e la quantità di moto del fotone</p> <p>L'effetto Compton</p> <p>Il modello di Bohr dell'atomo di idrogeno</p> <p>L'ipotesi di de Broglie e il dualismo onda-particella</p> <p>Dalle onde di de Broglie alla meccanica quantistica</p> <p>La teoria quantistica dell'atomo di idrogeno</p> <p>Il principio di indeterminazione di Heisenberg</p> <p>L'effetto tunnel quantistico</p>	<p>La fisica risponde <i>I pannelli fotovoltaici</i></p> <p>CLIL Physics <i>Quantum information and teleportation</i></p>

---

# Quantum Mechanics Simulations

---

# https://phet.colorado.edu/



SIMULATIONS TEACHING RESEARCH ACCESSIBILITY [DONATE](#)



Browse Filter

SUBJECT



21 Results

A-Z



- Physics
  - Motion
  - Sound & Waves
  - Work, Energy & Power
  - Heat & Thermo
  - Quantum Phenomena
  - Light & Radiation
  - Electricity, Magnets & Circuits
- Chemistry
  - General Chemistry
  - Quantum Chemistry

Quantum Phenomena

Alpha Decay

Band Structure

Beta Decay

Blackbody Spectrum

---

## Developing and researching PhET simulations for teaching quantum mechanics

S. B. McKagan, K. K. Perkins, M. Dubson, C. Malley, S. Reid, R. LeMaster, and C. E. Wieman

Citation: *American Journal of Physics* **76**, 406 (2008); doi: 10.1119/1.2885199

View online: <https://doi.org/10.1119/1.2885199>

View Table of Contents: <https://aapt.scitation.org/toc/ajp/76/4>

Published by the [American Association of Physics Teachers](#)

<https://doi.org/10.1119/1.2885199>

99

---

## **ABSTRACT**

Quantum mechanics is counterintuitive, difficult to visualize, mathematically challenging, and abstract. The Physics Education Technology (PhET) Project now includes 18 simulations on quantum mechanics designed to improve the learning of this subject. These simulations include several key features to help students build mental models and intuition about quantum mechanics: visual representations of abstract concepts and microscopic processes that cannot be directly observed, interactive environments that directly couple students' actions to animations, connections to everyday life, and efficient calculations so that students can focus on the concepts rather than the mathematics. Like all PhET simulations, these are developed using the results of research and feedback from educators, and are tested in student interviews and classroom studies. This article provides an overview of the PhET quantum simulations and their development. We also describe research demonstrating their effectiveness and discuss some insights about student thinking.

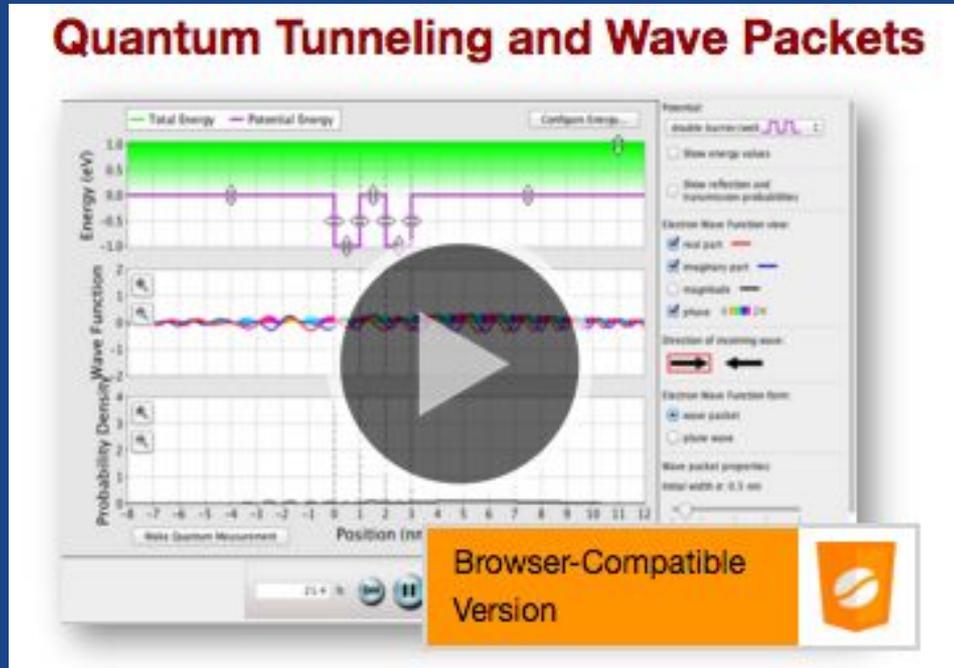
<https://doi.org/10.1119/1.2885199>

Table I. PhET simulations on quantum mechanics.

Fundamental principles	Historical experiments	Applications
Quantum Tunneling and Wave Packets	Photoelectric Effect	Lasers
Quantum Wave Interference	Davisson-Germer: Electron Diffraction	Neon Lights and Other Discharge Lamps
Quantum Bound States	Stern-Gerlach Experiment	Simplified MRI
Double Wells and Covalent Bonds	Rutherford Scattering	Semiconductors
Band Structure	Models of the Hydrogen Atom	Conductivity
Fourier: Making Waves	Blackbody Spectrum	Nuclear Physics

<https://doi.org/10.1119/1.2885199>

# Quantum Tunneling and Wave Packets



<https://phet.colorado.edu/en/simulation/quantum-tunneling>