

Convergenza di Successioni di Variabili Aleatorie

Convergenza di VA

- Definire i vari tipi di convergenza di successioni di variabili aleatorie
 - ▶ quasi certa
 - ▶ in probabilità
 - ▶ in L^p
 - ▶ in distribuzione
- Relazioni tra i vari tipi di convergenza, esempi
- Due risultati classici
 - ▶ Legge dei Grandi Numeri
 - ▶ Teorema del Limite Centrale

Convergenza di VA

- Data una successione $(X_n)_{n \geq 1}$ di va su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e una va X

- ▶ [Convergenza quasi certa] $X_n \rightarrow X$ q.c. se esiste $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 1$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \text{ per ogni } \omega \in A$$

- ▶ [Convergenza in probabilità] $X_n \rightarrow^P X$ se per ogni $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Convergenza di VA

- Data una successione $(X_n)_{n \geq 1}$ di va su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e una va X

- ▶ [Convergenza in L^p , $p \geq 1$] quando $X_n, X \in L^p$, $X_n \rightarrow^{L^p} X$ se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_p(X_n, X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E[|X_n - X|^p] = 0$$

- ▶ [Convergenza in distribuzione o legge] $X_n \rightarrow^d X$ se per ogni $x \in \mathbb{R}$ punto di continuità di F_X ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

- Il limite è unico q.c. per convergenza q.c., in probabilità e in L^p ; è unica in legge nel caso di convergenza in legge

Convergenza di VA

- **Relazione** tra vari tipi di convergenza

- ▶ $X_n \rightarrow X$ q.c. $\Rightarrow X_n \rightarrow^P X$; l'implicazione opposta vale su una sottosuccessione

- ▶ se per $p \geq 1$ riesce $X_n \rightarrow^{L^p} X$, allora

- ① $X_n \rightarrow^{L^q} X$ per ogni $1 \leq q \leq p$

- ② $X_n \rightarrow^P X$

- ③ $\lim_{n \rightarrow +\infty} E[|X_n|^p] = E[|X|^p]$

- ▶ $X_n \rightarrow^P X \Rightarrow X_n \rightarrow^d X$; l'implicazione opposta vale se X è degenere

Convergenza di VA

- **Convergenza in legge:** coinvolge solo le cdf delle variabili ($\equiv$ le leggi immagine), possono essere anche definite su spazi di prob. diversi! si scrive

$$F_{X_n} \rightarrow^d F_X$$

- le seguenti proposizioni sono **equivalenti**

① $X_n \rightarrow^d X$

② per ogni $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e limitata

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[g(X_n)] = E[g(X)]$$

③ per ogni $B \in \mathcal{B}$ con $P(X \in \text{Fr}(B)) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \in B) = P(X \in B)$$

Convergenza di VA

- **Convergenza in legge:** coinvolge solo le cdf delle variabili ($\equiv$ le leggi immagine), possono essere anche definite su spazi di prob. diversi! si scrive

$$F_{X_n} \rightarrow^d F_X$$

- le seguenti proposizioni sono **equivalenti**

❶ $X_n \rightarrow^d X$

❷ per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[e^{itX_n}] = E[e^{itX}]$$

❸ per ogni t in un intorno non degenere di 0 (indipendente da n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[e^{tX_n}] = E[e^{tX}]$$

Convergenza di VA

- ESERCIZIO. [Teorema di Poisson] siano $(X_n)_{n \geq 1}$ con $X_n \sim \text{Binomiale}(n, p_n)$ con $p_n \in (0, 1)$ tale che

$$np_n \rightarrow \lambda \geq 0$$

allora

$$X_n \rightarrow^d \text{Poisson}(\lambda)$$

Convergenza di VA

- ESERCIZIO. siano $(X_n)_{n \geq 1}$ iid con $X_n \sim U(0,1)$ e poniamo

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

verificare che

▶ $M_n \rightarrow 1$ q.c.

▶ $M_n \xrightarrow{P} 1$

▶ $M_n \xrightarrow{L^2} 1$

▶ $M_n \xrightarrow{d} 1$

Convergenza di VA

- Per una successione $(X_n)_{n \geq 1}$ di va si pone

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{somma parziale}$$

$$\frac{S_n}{n} \quad \text{media empirica}$$

- **Legge forte dei grandi numeri:** se $(X_n)_{n \geq 1}$ sono iid e $X_n \in L^1$ per ogni n allora

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow E[X_1] \text{ q.c. e in } L^1$$

inoltre se $X_n \in L^2$ per ogni n allora

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow^{L^2} E[X_1]$$

- È sufficiente l'indipendenza a coppie delle variabili

Convergenza di VA

- **Teorema del Limite Centrale (CLT)**. Idea: la media empirica di termini casuali “piccoli” si distribuisce normalmente
- **CLT, versione “classica”**: $(X_n)_{n \geq 1}$ successione di va iid con $X_n \in L^2$ per ogni $n \geq 1$,

$$E[X_n] = \mu, \quad \text{VAR}[X_n] = \sigma^2$$

allora

$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow^d N(0, 1)$$

- Quindi $\frac{S_n}{n} \approx N(\mu, \sigma^2/n)$ e $S_n \approx N(n\mu, \sigma^2 n)$

Convergenza di VA

- CLT, versione “moderna”: $(X_n)_{n \geq 1}$ successione di va indipendenti con $X_n \in L^2$ per ogni $n \geq 1$,

$$E[X_n] = 0 \text{ (non restrittivo),} \quad \text{VAR}[X_n] = \sigma_n^2$$

posto $u_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ e se la **condizione di Lindeberg**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_n^2} E[X_i^2; |X_i| \geq \varepsilon u_n] = 0$$

per ogni $\varepsilon > 0$, allora

$$\frac{S_n}{u_n} \rightarrow^d N(0, 1)$$

- Basta una ipotesi di **indipendenza asintotica** per il teorema