FINITE SUBGROUPS of SU(2) vs SO(3)

Ricordiamo che se $\tilde{g} \in SU(2)$ può essere scritto come

$$\tilde{g} = \exp\left(i \alpha^a \frac{\sigma^a}{2} \right) = \cos\left(\frac{|\alpha|}{2} \right) \mathbb{1}_2 + i \,\mathrm{sen}\left(\frac{|\alpha|}{2} \right) \frac{\alpha^a \sigma^a}{|\alpha|}$$

- C'è omomorfismo suriettivo

$$p : SU(2) \longrightarrow SO(3)$$
$$\tilde{g} = e^{i\alpha^a \sigma^a/2} \longmapsto g = e^{-\alpha^a E^a}$$

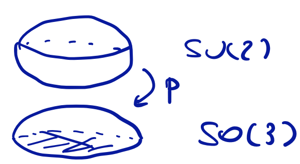
Il nucleo di qto omomorf. (cioè elem. di SU(2) che vengono mappati in $\mathbb{1} \in SO(3)$) è

$$\mathrm{Ker}\, p = \{ \mathbb{1}, -\mathbb{1} \} \qquad \leftarrow \; -\mathbb{1} = e^{i 2\pi \hat{\alpha}^a \sigma^a/2} \xmapsto{p} e^{-2\pi \hat{\alpha}^a E^a} = \mathbb{1}$$

$-\mathbb{1}$ è l'unico elemento di SU(2) di ordine 2 (a parte $\mathbb{1}$).

g t.c. $g^2 = \mathbb{1}$

Qto è tipico di un RICOPRIMENTO DOPPIO (nel nostro caso $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$)



- Dato sottogruppo finito $\tilde{G} \subset SU(2)$, $G = p(\tilde{G}) \subset SO(3)$

- Dato sottogruppo finito $G \subset SO(3)$ posso liftarlo a un $\tilde{G} \subset SU(2)$ t.c. $G = p(\tilde{G})$ e il nucleo di $\tilde{G} \xrightarrow{p} G$ sia di ordine ≤ 2. ($=2$, tranne gruppi ciclici $=1$)

- Se G ha almeno un elemento di ordine 2 (g t.c. $g^2 = \mathbb{1}$) allora $\tilde{G}$ NON può essere $G \times \mathbb{Z}_2$ (estensione triviale) altrim. $G \times \mathbb{Z}_2$ avrebbe 2 elem. non-triv. di ordine 2, che è incompatibile con l'essere sottogruppo di $SU(2)$.

  $\Rightarrow$ Se G ha un elem. di ord. 2, $\tilde{G}$ sarà un'estensione non triviale di G.

- Classifichiamo prima i sottogruppi finiti di $SO(3)$

AZIONE DI G su insiemi.

- Possiamo definire un'azione di G su $G \times M$:

$$a \cdot (b, m) = (aba^{-1}, am) \qquad a \in G$$

Insieme su cui è def. l'azione del gruppo G

$G : M \to M$

- Sia $m \in M$, definiamo isotropy group of m

$$G_m = \{ a \in G \mid am = m \}$$

← sottogruppo di G che lascia m invariato

- Definiamo $Z = \{ (b, m) \in G \times M \mid b \in G_m \}$

G agisce su Z : $a \cdot (b, m) = (aba^{-1}, am) \in Z$ ← $aba^{-1} \in G_{am}$

cioè

$$G_{am} = a G_m a^{-1}$$

- Definiamo $FP(a) = \{ m \in M \mid am = m \}$

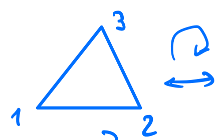
l'insieme dei punti fissi di $a \in G$.

- Notiamo che $\mathbb{1} \in G_m \ \forall m \in M \Rightarrow \{\mathbb{1}\} \times M \subset Z$.

Definiamo

$$Y = Z \setminus \{\mathbb{1}\} \times M = \{ (a, m) \in G \times M \mid am = m, a \neq \mathbb{1} \}$$

Esempio: $G = S_3$ Esso agisce sul triangolo equilatero



$$Z = \{ (\mathbb{1}, 1), (\mathbb{1}, 2), (\mathbb{1}, 3), ((23), 1), ((13), 2), ((12), 3) \}$$

$$Y = \{ ((23), 1), ((13), 2), ((12), 3) \}$$

(Le permutazioni cicliche non fissano nessun pto.)

• Consideriamo $G \subset SO(3)$ finito e t.c. ogni $a \neq \mathbb{1}$ ha un numero finito di punti fissi.

Questo succede per G sottogruppo finito di $SO(3)$ e $M = S^2_{R=1} \subset \mathbb{R}^3$: se $m \in S^2$ è fissato da $a \in G$, allora $s = -m$ è anche fissato da a. Questi sono gli unici pti di S^2 fissati da a.

↳ Se ci fosse un altro pto fisso su S^2, allora ogni loro comb. lineare sarebbe fissata da a $\Rightarrow$ avremmo un continuo di pti fissi che stanno su un cerchio. Siccome $a \in SO(3)$ manda terne o.n. in terne o.n., a fisserebbe anche i vettori $\perp$ a pl. sul cerchio. Ma allora fisserebbe tutte le comb. lineari $\in \mathbb{R}^3 \supset S^2 \Rightarrow a = \mathbb{1}$.

In questo caso, Y è un insieme finito con

$$|Y| = \sum_{a \neq \mathbb{1}} |FP(a)| = \sum_{m \in P} \big(|G_m| - \underset{\uparrow \text{togliamo } \mathbb{1}}{1} \big) \qquad (*)$$

dove $P \subset M$ è def. come $P = \{ m \in M \mid \exists a \in G, a \neq \mathbb{1} \text{ t.c. } am = m \}$

(Se $M = S^2$, ogni suo pto è fissato da qlche elem. di $SO(3)$; tale m apparit. a P se gli elem. stanno in $G \subset SO(3)$.)

- $G_{am} = a G_m a^{-1} \Rightarrow |G_{am}| = |G_m|$
- Inoltre, se $m_1 \in P$ allora $P_{m_1} = \{ am_1 \mid a \in G \} \subset P$

  $\Rightarrow$ possiamo decomporre P in orbite (disgiunte) di G:

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_r \qquad r = \#\text{orbite}$$

- Il numero di elem. in un'orbita è $\dfrac{|G|}{|G_m|}$.

$$\Rightarrow \quad |Y| = \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|G_{m_i}|} \left(|G_{m_i}| - 1 \right)$$

$|G_{m_i}|$ è ben def. sull'orbita P_{m_i}

FINITE SUBGROUPS OF SO(3)

- Qti gruppi hanno a che fare con le simmetrie dei CRISTALLI.

- Ricordiamo che ogni $g \in SO(3)$ $(g \neq \mathbb{1})$ è una ROTAZIONE attorno ad un ASSE, individuato dal vettore $\bar{v}$ t.c. $g\bar{v} = \bar{v}$.

  (Tale $\bar{v}$ esiste: $g - \mathbb{1} = g(\mathbb{1} - g^{-1}) = g(\mathbb{1} - g^T)$;
  $\det(g - \mathbb{1}) = \overset{=1}{\cancel{\det g}} \cdot \det(\mathbb{1} - g) \Rightarrow \det(g - \mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \exists\, v$ t.c. $(g - \mathbb{1})\bar{v} = 0$.)

- $G \subset SO(3)$ agisca su $M = S^2$ $(R = 1)$.
  Ogni $g \in G$ ha 2 PUNTI FISSI su $M = S^2$.

$$\Rightarrow \quad |Y| = \sum_{\substack{a \in G \\ a \neq \mathbb{1}}} |FP(a)| = 2(|G| - 1) \qquad (*)$$

- Sia $n \equiv |G|$ $\quad n_i \equiv |G_{m_i}|$ $\quad m_i \in P_i$ $\quad r = \#\text{orbite}$

$$\overset{(A),(*)}{\Longrightarrow} \quad 2(n-1) = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{n_i}(n_i - 1)$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{2 - \frac{2}{n} = r - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i}} \qquad (*)$$

Qta relazione impone vincoli severi su r, n, n_i. Vediamo come.

- P è composto da elementi che sono fissi sotto almeno un elem. di $G \neq 1\!\!1$ $\Rightarrow$ per $m \in P$, $G_m \neq \{1\!\!1\}$ $\Rightarrow |G_m| \geq 2$ in $(*)$, cioè $n_i \geq 2$ $\Rightarrow -\frac{1}{n_i} \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 2 - \frac{2}{n} = r - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \quad \Rightarrow \quad r < 4$$

- Inoltre $n_i \leq n \Rightarrow 2 - \frac{2}{n} = r - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} \leq r - \frac{r}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow r \geq 2$

$\Rightarrow$ il numero di orbite di G in P assume solo due valori

$r = 2, 3$.

- Se $\underline{r=2}$: $\quad \frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \xRightarrow[0<n_i\leq n]{} n_1 = n_2 = n$

Prendiamo un elem. di G; qto fissa due pti antipodali in S^2 $\pm m$ (che quindi $\in P$); per $r=2$ $G_m = G$ $(n_i = n)$

$\Rightarrow$ quindi tutti gli elem. di G fissano qti due pti

$\rightarrow G$ è fatto da rotazioni attorno a un unico asse, cioè $G \subset SO(2) \subset SO(3)$. $\quad P = \{+m\} \cup \{-m\}$

$\Rightarrow G = C_n$ cyclic group of order n (generated by rotation by $2\pi/n$)

- Se $\underline{r=3}$: $\quad \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{n}$

Senza perdita di generalità, assumiamo $n_1 \leq n_2 \leq n_3$.

Dobbiamo avere $n_1 = 2$, altrimenti LHS ≤ 1. Analogam. $n_2 \leq 3$

Se $n_2=2 \Rightarrow n_3 = n/2$, cioè $n=2k$ è pari arbitrario.

Se $n_2=3$, allora $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{n} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{12}{n}\right) \Rightarrow n_3 < 6$.

$\Rightarrow$ abbiamo le seguenti possibilità:

$$(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} (2,2,k) & n=2k \quad k\geq 2 \text{ arbitrario} \\ (2,3,3) & n=12 \\ (2,3,4) & n=24 \\ (2,3,5) & n=60 \end{cases}$$

Vediamo ora a quali gruppi corrispondono.

$(2,2,k)$: Gruppo Dihedrale D_k (sim. di rotaz. e rifl. di k-poligono)

Dim. Abbiamo tre orbite P_1, P_2, P_3.

- $|P_i| = \frac{|G|}{|G_{m_i}|} = \frac{n}{n_i} \Rightarrow |P_3| = \frac{n}{n_3} = \frac{n}{n/2} = 2$

  $\rightarrow$ L'orbita P_3 ha 2 elem. che sono mandati l'uno nell'altro da $G \Rightarrow$

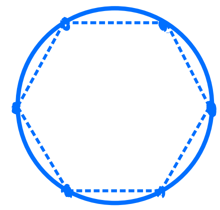
  qti due pti devono essere antipodali $\Rightarrow g$ devono agire come rotaz. π o 2π
- $G_{P_3} \cong G_{m_3}$ $m_3 \in P_3$ fissa due pti antipodali $\Rightarrow$ sono rotazioni sul piano ortogonale ai due pti. Inoltre $|G_{P_3}| = k = n/2 \Rightarrow G_{P_3} \cong C_k$.
- I gruppi G_{P_i} $i=1,2$ che fissano gli elem. delle orbite P_i, hanno $|G_{P_i}| = n_i = 2 \Rightarrow G_{P_{i=1,2}} \cong \mathbb{Z}_2 = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$

  Dato $m \in P_{1,2}$, $g \in G_m$ non può fissare ANCHE i 2pti in P_3, perché g fissa solo 2 pti e le orbite sono disgiunte $\Rightarrow m \neq pt \in P_3$ $\Rightarrow$ g scambia i 2 pti in P_3.

  Qto è vero $\forall m \in P_{1,2} \Rightarrow$ qti punti giacciono su piano $\perp$ ai due pti in P_3,

- Le rotaz. $\in G_{P_3}$ agiscono transitivam. sui pti in P_1, P_2 e li ruotano di $2\pi/k$.

$\Rightarrow$ i k pti di P_1 e P_2 stanno sui vertici di un poligono regolare a k vertici.

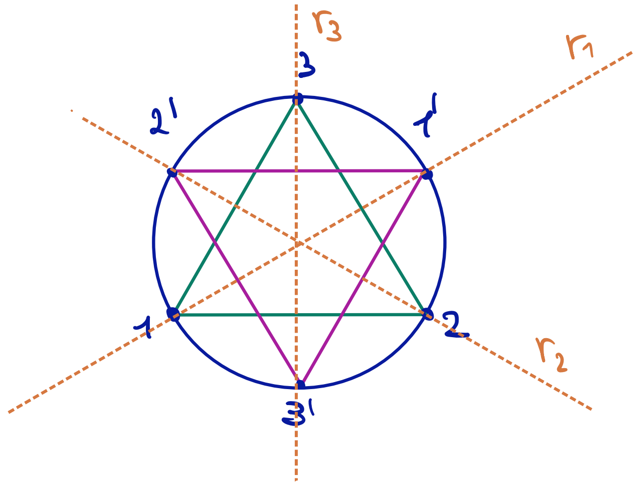


$k=6$

- Dato $m_1 \in P_1$, G_{m_1} sono rotaz. di π con asse $\parallel m_1$ ($\leftrightarrow$ riflessione del poligono.) che fissano m_1 e $-m_1$.
  - Per k pari $-m_1 \in P_1 \Rightarrow G_{m_1}$ non fissa alcun pto in P_2 ma ci deve agire transitivamente $\Rightarrow$ pti in P_2 stanno su un altro poligono coi k vertici sugli assi dei lati di P_1.
  - Per k dispari $m_2 = -m_1 \in P_2$. I due k-poligoni hanno vertici in posizione opposta.

(Possiamo pensare a questo poligono piano come un poliedro degenere; viene infatti anche chiamato diedro.)

ES.



$k=3 \rightsquigarrow$ ord. gr. $=6$

$G=\{\mathbb{1}, g_{2\pi/3}, g_{4\pi/3}, r_1, r_2, r_3\}$

$P=\{P_3^{(1)}, P_3^{(2)}, 1,2,3, 1',2',3'\}$

$G_{P_3} \cong \{\mathbb{1}, g_{2\pi/3}, g_{4\pi/3}\} \cong C_3$

$P_3=\{P_3^{(1)}, P_3^{(2)}\}$

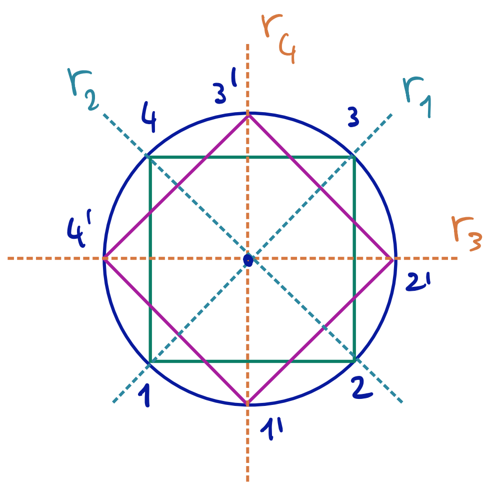
$G_{P_2} \cong \{\mathbb{1}, r_1\} \cong \{\mathbb{1}, r_2\} \cong \{\mathbb{1}, r_3\}$

$P_2=\{1,2,3\}$

$G_{P_1} \cong \{\mathbb{1}, r_1\} \cong \{\mathbb{1}, r_2\} \cong \{\mathbb{1}, r_3\}$

$P_3=\{1',2',3'\}$

ES.



$k=4 \rightsquigarrow$ ord gr $=8$

$G=\{\mathbb{1}, g_{\pi/2}, g_{\pi}, g_{3\pi/2}, r_1, r_2, r_3, r_4\}$

$P=\{P_3^{(1)}, P_3^{(2)}, 1,2,3,4, 1',2',3',4'\}$

$G_{P_3} \cong \{\mathbb{1}, g_{\pi/2}, g_{\pi}, g_{3\pi/2}\} \cong C_4$

$P_3=\{P_3^{(1)}, P_3^{(2)}\}$

$G_{P_2} \cong \{1, r_1\} \cong \{1, r_2\}$

$P_2=\{1,2,3,4\}$

$G_{P_1} \cong \{1, r_3\} \cong \{1, r_4\}$

$P_4=\{1',2',3',4'\}$

$(2,3,3)$: Gruppo T_{12} di simm. del TETRAEDRO.

- Ci sono sottogruppi di ordine due $\cong G_{p_1}$; i vett. fissati da tali gruppi stanno in orbita con $\frac{12}{2}=6$ elementi
- Ci sono poi sottogruppi di ordine tre $\cong G_{p_2} \cong G_{p_3}$ i cui pti fissi stanno in due orbite con $\frac{12}{3}=4$ elementi.
- G_{p_i} sono sottogruppi finiti di $SO(3)$; gli unici tali gruppi con ordine 2 e 3 sono C_2 e C_3.
- Prendiamo orbita $P_2 = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$. $G_{m_1} \cong C_3$.

  G_{m_1} agisca transitivam. su m_2, m_3, m_4 (se uno di essi fosse anche pto fisso, gli altri due non potrebbero stare in un'orbita di G_{m_1})

  $\Rightarrow$ i segmenti che uniscono m_1 con altri m_i hanno tutti lunghezza uguale. Possiamo fare stesso ragionam. con ogni G_{m_i}

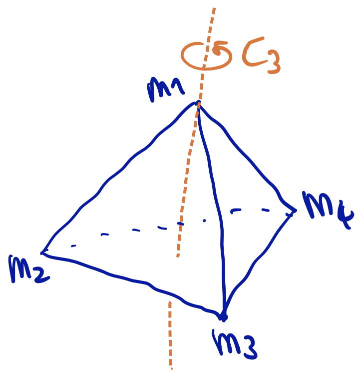
  $\Rightarrow$ Elem. di P_2 sono vertici di un tetraedro.

  Siccome $-m_i \notin P_2$, pti in P_3 formano un altro tetraedro.

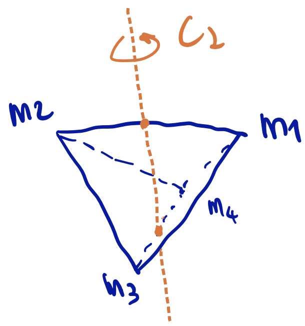
  $\Rightarrow G$ è $\subset$ {gruppo di simmetrie del tetraedro}.
- Il gruppo di simm. del tetraedro ha rotaz. attorno assi $\left(\begin{smallmatrix}2\text{ elem}\\ \text{non}\\ \text{triviali}\end{smallmatrix}\right)$ passanti per i suoi 4 vertici $(g_1, g_1^2, g_2, g_2^2, g_3, g_3^2, g_4, g_4^2)$ e rotazioni attorno ad assi passanti per centri dei segm. che non si toccano; ci sono 6 lati, 3 coppie (h_1, h_2, h_3)

  $\Rightarrow \# T = 1+8+3 = 12 \;\#G \Rightarrow G=T$ essendo suo sottogruppo.
- Gli elem. h_1, h_2, h_3 sono rotaz. di $\pi \Rightarrow$ fanno 3 sottogr. $C_2 \cong G_{p_1}$

Qti fissano pti sulla sfera (che non stanno sul tetraedro) antipodali $\rightsquigarrow$ sono 6 pti $\pm m_j$ $j=1,2,3$. I sottogruppi C_3 agiscono transitivam. (i loro pti fissi stanno in P_2, P_3) e fanno sì che gli 6 pti stiano in una sola orbita (P_1).



$m_2 \mapsto m_3 \mapsto m_4 \mapsto m_2$



$m_2 \mapsto m_1 \mapsto m_2$

$m_3 \mapsto m_4 \mapsto m_3$

(2,3,4) : Gruppo O_{24} di simmetrie del CUBO/OTTAEDRO

(questi due solidi sono "duali" tra loro e hanno lo stesso gruppo di simmetrie).

S_1 e S_2 duali $\Rightarrow$ # facce 1 = # vertici 2
vertici 1 = # facce 2
segm. 1 = # segm 1

- Ci sono sottogr. di ordine 2, 3, 4. Essi sono sottogr. di $SO(3)$ e quindi sono isomorfi a C_2, C_3 e o C_4 o $\cancel{D_2}$. $\to G_{m_i} \subset SO(2)$
- Le tre orbite in P hanno elem. $\#P_1 = \frac{24}{2} = 12$
$\#P_2 = \frac{24}{3} = 8$ $\quad \#P_3 = \frac{24}{4} = 6$.
- Consideriamo $P_3 = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}$.

G_{m_1} deve fissare anche $-m_1$, altrimenti avremo due orbite con $\# = 6$ (perché partiremmo da m_1 o da $-m_1$ con $G \subset SO(3)$ per fare orbite isom.)

Quindi $P_3 = \{m_1, -m_1, m_2, -m_2, m_3, -m_3\}$. G_{m_1} agisce in maniera transitiva su $m_2, -m_2, m_3, -m_4$; infatti $G_{m_1} \subset SO(2)$ (piano $\perp \pm m_1$) ed è di ordine 4 $\Rightarrow G_{m_1} \cong C_4 \Rightarrow$ segm. $(1i)$ tutti stessa lungh.

$\Rightarrow$ tutti segm. (ij) sono stesse lungh $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{\pm m_1, \pm m_2, \pm m_3\}$ stanno su vertici di un ottaedro (o nel centro delle facce di un cubo).

$\Rightarrow G \subseteq O$

- $\#O = 24 = \#G$. Infatti le simm. di un ottaedro sono
  - rotaz. di $\pi/2$ attorno assi passanti per $\pm m_i$ $(i = 1,2,3)$
  $\{g_i, g_i^2, g_i^3\}_{i=1,2,3}$ $\quad \# = 9$
  - rotaz. di $\pi/3$ attorno assi passanti per centro di due facce opposte (ottaedro ha 8 facce)
  $\{h_I, h_I^2\}_{I=1,2,3,4}$ $\quad \# 8$

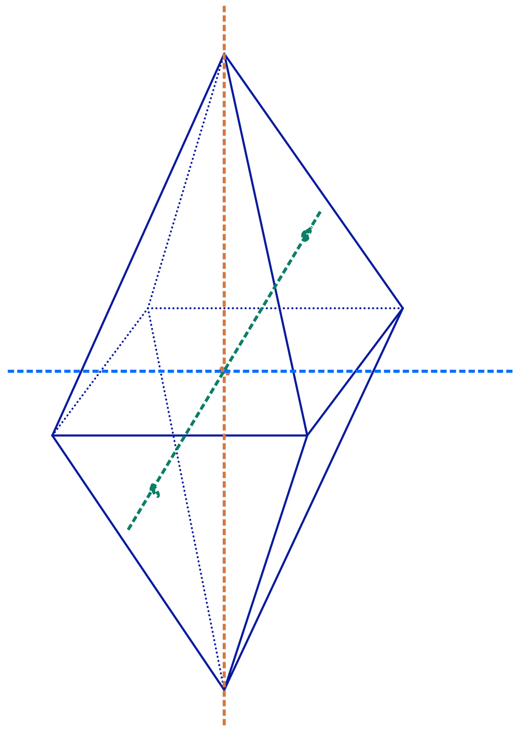
- rotaz. di π attorno assi passanti per centro di segm. opposti (ottaedro ha 12 segm.)

  $\{ r_a \}_{a=1,2,3,4,5,6}$ $\quad \# 6$

- identità $\quad \# = 1$.

$\Rightarrow \quad G = O$.

. $P_1 = \{$ segm. ottaedro $\}$ $\quad P_2 = \{$ facce ottaedro $\}$ $\quad P_1 = \{$vertici ottaedro$\}$.



$(2,3,5)$: Gruppo I_{60} di simm. di DODECAEDRO / ICOSAEDRO

(solidi duali : $\#$facce 1 $= \#$vertici 2 $= 12$, $\#$vertici 1 $= \#$facce 2 $= 20$

$\#$segm 1 $= \#$segm 2 $= 30$).

- Ci sono sottogruppi di ord. $2,3,5$ $\cong C_2, C_3, C_5$.
- Orbite $\# P_1 = 30$ $\quad \# P_2 = 20$ $\quad \# P_1 = 12$
- $P_1 = \{\pm m_1, \pm m_2, \pm m_3, \pm m_4, \pm m_5, \pm m_6\}$ Senza perdita di gen., prendiamo $+m_i$ in emisfero N e $-m_i$ in plo S.

$G_{m_1} \cong C_5$ agisce transitivam. su $P_1 \to$ dentro P_1

ci sono 2 orbite di G_{m_1} $\{+m_i\}$ e $\{-m_i\}$

(essendo orbite di C_5 devono stare su un piano $\perp \pm m_1$.)

segm. $(1i)$ sono tutti uguali, segm. $(-1-i)$ tutti uguali

$\Rightarrow$ ogni pto legato a 5 altri pti da segm. uguali.

$\Rightarrow$ tutti triangolini equilateri $\rightsquigarrow 20$.

$P_1 \rightsquigarrow \{$ vertici di un icosaedro $\}$.

$G \subseteq I_{60}$.

I_{60} ha	$\{g_I, g_I^2\}_{I=1,\dots,10}$	rotaz. asse per centro facce	20
	$\{h_a, h_a^2, h_a^3, h_a^4\}_{a=6}$	" " " vertici	24
	$\{r_p\}_{p=1,\dots,15}$	" " " centro segm.	15

$\# I_{60} = 1 + 20 + 24 + 15 = 60 \Rightarrow G = I_{60}$.

Abbiamo quindi i seguenti sottogruppi finiti di $SO(3)$:

(n, n)	C_n	gr. ciclico	ord $= n$	n arbitrario
$(2, 2, k)$	D_k	gr. dihedrale	ord $= 2k$	$k \geq 2$ arbitrario
$(2, 3, 3)$	T	gr. tetraedrico	ord $= 12$	
$(2, 3, 4)$	O	gr. octaedrico	ord $= 24$	
$(2, 3, 5)$	I	gr. icosaedrico	ord $= 60$	

Vogliamo liftarli a sottogruppi finiti di $SU(2)$.

- Tutti i sottogr. finiti di $SO(3)$ hanno un elem. di ordine 2 (a parte C_n con n dispari)

  $\longrightarrow$ liftano tutti a ricoprimenti doppi non banali; il loro nome è lo stesso del rispettivo sottogr. di $SO(3)$, ma con l'aggiunta di "Binario".
- Il caso $C_{2k+1} \subset SO(3)$: questo ha due lift:
  - $C_{2(2k+1)} \subset SU(2)$ (ricoprim. doppio)
  - $C_{2k+1} \subset SU(2)$ (ricoprim. banale $C_{2k+1} \times \mathbb{Z}_2$)

$\Rightarrow$ tutti i gruppi ciclici sono realizzati tra i sottogr. di $SU(2)$.

In particolare in $SO(3)$

$$C_n \ni \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} & \\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \exp\left(\frac{2\pi}{n} E_3\right)$$

$$\text{Lift: } \quad \exp\left(\frac{2\pi}{n}\, \frac{i\sigma_3}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i/2n} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/2n} \end{pmatrix} \in C_{2n}$$

Quindi i sottogruppi finiti di $SU(2)$ sono

A_{n-1}	C_n	gr. ciclico	ord $= n$	n arbitrario
D_{k+2}	D^*_k	gr. binario dihedrale	ord $= 4k$	$k \geq 2$ arbitrario
E_6	T^*	gr. binario tetraedrico	ord $= 24$	
E_7	O^*	gr. binario octaedrico	ord $= 48$	
E_8	I^*	gr. binario icosaedrico	ord $= 128$	

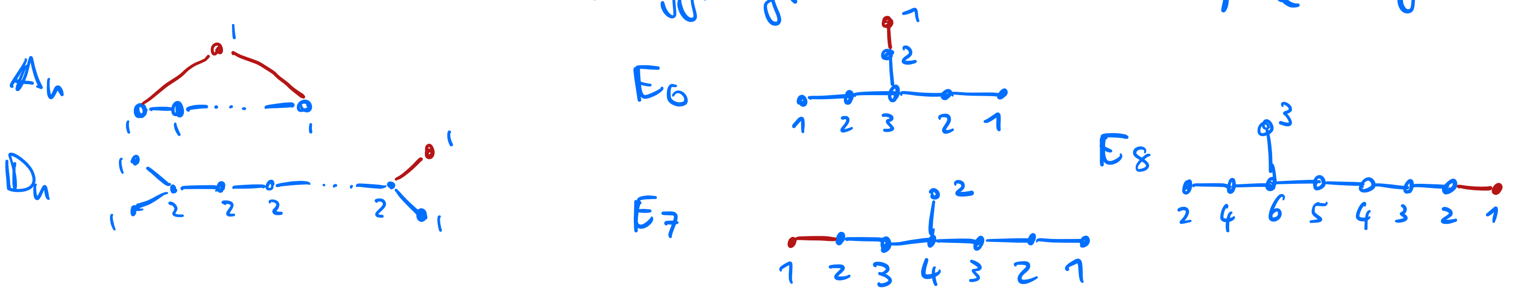
↑
ADE classification

$\mathbb{C}^2/G$ $\quad G \subset SU(2)$ è ADE sing.

McKay CORRESPONDENCE

→ Ad ogni sottogruppo finito di $SU(2)$ è associato un diagramma di Dynkin esteso di tipo A, D o E, coi Coxeter labels.

↳ cioè si aggiunge un nodo che corrisp. a $-$ highest root



Tali diagr. portano info sulle rep di $G \subset SU(2)$:

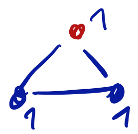
- In quanto sottogr. di $SU(2)$, la rap. fond. di $SU(2)$ sarà una rep. (in gen. riducibile) di G; chiamiamola R.
- I nodi del diagr corrispondono a irrep di G e il Coxeter label dà la dim. della rep.

• Il numero di linee n_{ij} tra nodo i e nodo j è determinato nel seguente modo: data rep. R_i,

$$R_i \otimes R = \bigoplus_j R_j^{\oplus n_{ij}}$$

molteplicità di irrep R_j in scomposiz. di $R_i \otimes R$

ES. $C_3 \longleftrightarrow$

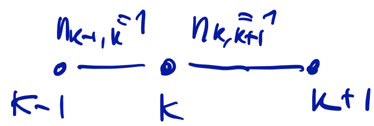


A_2 $\quad C_3 = \{1, g, g^2\}$

$$\rho_R(g) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/3} \end{pmatrix} \Rightarrow R = R_1 \oplus \bar{R}_1 \quad \text{dove } \rho_{R_k}(g) = g^k$$

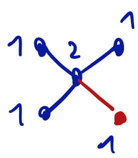
$k = 0,1,2$

Quindi $R_k \otimes R = R_{k+1} \oplus R_{k-1} \Rightarrow$



e così ricostruisco diagramma circolare (questo vale $\forall\, C_n$).

ES. $D_2^* \longleftrightarrow$



D_4 $\rightsquigarrow$ ci sono 5 rep. $\underbrace{r_0, r_1, r_2, r_3}_{\dim=1}, \underbrace{r}_{\dim=2}$

Qui $R = r$.

$r_i \otimes R = r \qquad r \otimes R = r_0 \oplus r_1 \oplus r_2 \oplus r_3$.

GRUPPI CICLICI

Se n è dispari $C_{2(2k+1)} = C_{4k+2}$ è sempre isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times C_{2k+1}$ e quindi anche $SU(2)$ contiene C_{2k+1} come sottogruppo:

$$C_{4k+2} = \{ g_\ell = e^{\ell \pi i / 2k+1} \mid \ell = 0, 1, 2, 3, \dots, 4k+1 \}$$

$\ell = 2(m-k) = -2k, -2k+2, \dots, 2k$
$\simeq 0, 2, \dots, 4k$
$\hookrightarrow \ell = 2m$

per $\ell = 2m+1$ $\quad e^{(2m+1+2k-2k)\pi i / 2k+1} = e^{\pi i} \underbrace{e^{2\pi i (m-k)/2k+1}}_{\in C_{2k+1}}$

$\Rightarrow g_{2m+1} = (-1) \cdot g_{2m}$ ovvero $g_{2m+r} = (-1)^r g_{2m}$

$\{ g_{2m} \}$ formano sottogr. $C_{2k+1} \subset C_{4k+2}$

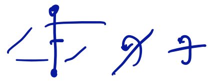
Esiste isomorf. $C_{4k+2} \cong C_{2k+1} \times \mathbb{Z}_{2,+}$ $\simeq \{ r=0, r=1 \}$

$$g_{2m} \longmapsto (g_m, 0)$$
$$g_{2m+1} \longmapsto (g_m, 1)$$

Prodotto è compatib. :

$$(g_m, r)(g_{m'}, r') = g_{2m+r}\, g_{2m'+r'} = (-1)^{r+r'} g_{2(m+m')} = (g_m g_{m'}, r+r')$$

Qto isomorfismo <u>non</u> esiste per C_{4k}.

D_2 : simm. di segm.  $\#D_2 = 4$ $\quad D_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$$D_2 = \{ \mathbb{1},\ e^{\pi E_3},\ e^{\pi E_1},\ e^{\pi E_3} \cdot e^{\pi E_2} \} \qquad e^{\pi E_3} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$e \quad g_1 \quad g_2 \quad$ commutano $\quad g_1 g_2$

$$e^{\pi E_2} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Facciamo lift con $p : SU(2) \to SO(3)$

$$D_2^* = \{ \mathbb{1}, -\mathbb{1}, e^{i\pi\sigma^3/2}, e^{3i\pi\sigma^3/2}, e^{i\pi\sigma^2/2}, e^{3i\pi\sigma^2/2}, \dots, \dots \}$$

$$\{ e, g_0, \underset{\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}}{g_1}, g_0 g_1, \underset{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{g_2}, g_0 g_2, g_1 g_2, g_0 g_1 g_2 \}$$

NON-ABELIANO $\quad g_2 g_1 = g_0 g_1 g_2$

Qto è il gruppo che mi dà sing. D_4 quando faccio $\mathbb{C}^2 / D_2^*$.

D_2^* generato da $g_1 = \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}$ e $g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathbb{C}^2$ con coord. x_1, x_2

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{}{\underset{g_1}{\longmapsto}} \begin{pmatrix} i x_1 \\ -i x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \underset{g_2}{\longmapsto} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

Invarianti sotto g_1:

$$a = \frac{x_1^4 + x_2^4}{2}$$
$$b = \frac{x_1^4 - x_2^4}{2} \qquad \text{con } a^2 - b^2 = c^4$$
$$c = x_1 x_2$$

Sotto g_2: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \underset{g_2}{\longmapsto} \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}$

Inv. sotto entrambi generatori:

$$X = c^2 \qquad T = b^2 \qquad Z = bc \qquad Y = a$$

con $\quad Z^2 = X T \quad$ e $\quad Y^2 - T = X^2$

$\hookrightarrow T = Y - X^2 = (Y+X)(Y-X)$

$\longrightarrow \quad Z^2 = X(Y+X)(Y-X) \quad \rightsquigarrow$ sing. D_4.