

# ANOMALIES & PATH INTEGRAL

Consideriamo  $\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi$

$$\not{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu + i A_\mu)$$

in dimensioni  $d$   
 $\nwarrow$  PARI

↑  
fermioni  
di Dirac in  
sp. R

↑  
abeliano  
non-abel. ( $A_\mu = A_\mu^a T_a$ )

Passiamo all'Eulidea (P.L. è meglio definito)

$$x^0 = -i x^4$$

$$\partial_0 = i \partial_d$$

$$\gamma_0 = -i \gamma_E^d$$

$$\gamma_i = \gamma_E^i$$

$$A_0 = i A_d$$

$$i = 1, \dots, d-1$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \rightarrow \{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu}$$

$$\not{D}_\mu = \gamma_\mu^\alpha \partial_\alpha = \gamma_0^\alpha \partial_\alpha + \gamma_i^\alpha \partial_\alpha = \gamma_E^d \partial_d + \gamma_E^i \partial_i = \not{D}_E$$

$$(\gamma_5^\mu)^2 = 1 \quad \{\gamma_5^\mu, \gamma_\mu^\nu\} = 0 \rightarrow \gamma_5^\mu = - (i)^{\frac{d}{2}+1} \gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^{d-1}$$

$$\text{Controlliamo } (\gamma_5^\mu)^2 = (-1)^{\frac{d}{2}+1} \overbrace{\gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^{d-1}}^{d-1} \overbrace{\gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^{d-1}}^{(d-1)^2=1} =$$

$$= (-1)^{\frac{d}{2}+1} (-1)^{d-1} \gamma^1 \dots \gamma^{d-1} \gamma^1 \dots \gamma^{d-1} =$$

$$= (-1)^{\frac{d}{2}+1} (-1)^{d-1} (-1)^{d-1} (-1)^{\sum_{k=1}^{d-1} k} \overbrace{(\gamma^1 \dots \gamma^{d-1})^2}^{(d-1)d-2}$$

$$= (-1)^{\frac{d}{2}+1 + \frac{d-1}{2} + \frac{d-1}{2} + \frac{(d-1)d-2}{2}} = (-1)^{\frac{d^2-d}{2}} = (-1)^{\frac{d^2}{2}} = 1$$

$$d \text{ pari} \Rightarrow d^2 \in 4\mathbb{Z}$$

$$\gamma_5^\mu = - (i)^{\frac{d}{2}+1} (-i) \gamma_E^d \gamma_E^1 \dots \gamma_E^{d-1} = - i^{d/2} (-1)^{d-1} \gamma_E^1 \dots \gamma_E^{d-1} =$$

$$= (-i)^{3d/2} \gamma_E^1 \dots \gamma_E^{d-1}$$

Consistentemente con  $(\gamma_E^\mu)^2 = -1$  possiamo prendere  $\gamma_E^\mu$  ANTI-HERM.

$$\Rightarrow \not{D}^\dagger = (\gamma^\mu)^\dagger (-\partial_\mu - i A_\mu^\dagger) = \gamma^\mu (\partial_\mu + i A_\mu) = \not{D}$$

$\Rightarrow \not{D}$  è HERMITIANO!  $\leftarrow$  qto vale in Eulideo (non in Mink.)

$$iS_M = i \int d^d x \bar{\Psi} (i \not{D}_n - m) \Psi = i(-i) \int d^d x_{\bar{E}} \bar{\Psi} (i \not{D}_{\bar{E}} - m) \Psi =$$

$$= - \int d^d x_{\bar{E}} \bar{\Psi} (-i \not{D}_{\bar{E}} + m) \Psi \equiv -S_E$$

Consideriamo il funzionale generatore (def in Eud.)

$$Z[A] = \int D\Psi D\bar{\Psi} e^{\int dx \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi}$$

↓  
= det (i \not{D} - m)

↖ L è invariante sotto  
(global) transf. assiel. se m=0

Troviamo le WI relative alla simm. (globale) assiale:

consideriamo transf. assiali locali:

$$\Psi \mapsto \Psi' = e^{i\beta(x)\gamma_5} \Psi \quad \bar{\Psi} \mapsto \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} e^{i\beta(x)\gamma_5} \quad (*) \quad \beta = \beta^a t_a$$

$$\bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi \mapsto \bar{\Psi}' (i \not{D} - m) \Psi' = \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi - 2i \operatorname{im} \beta \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi$$

transf. infinitesime

$$- (\partial_\mu \beta) \underbrace{\bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi}_{j_A^\mu}$$

$$S' = S - \int dx \beta(x) \left[ \partial_\mu j_A^\mu - 2i \operatorname{im} P(x) \right]$$

$$Z[A] = \int D\Psi D\bar{\Psi} e^{-S[\Psi, \bar{\Psi}, A]}$$

cambiamo  
nome delle  
var. integ. →

$$= \int D\Psi' D\bar{\Psi}' e^{-S[\Psi', \bar{\Psi}', A]}$$

cambiamo  
coordinate  
usando (\*) →

$$= \int D\Psi D\bar{\Psi} J[\beta, A] e^{-S[\Psi, \bar{\Psi}, A]} e^{\int dx \beta(x) (\partial_\mu j_A^\mu - 2i \operatorname{im} P)}$$

tipicamente lo Jacobiano è assunto essere = 1 (misura invariante)  
e se pto è uno otteniamo WI compatibili  
con ciò che uno si aspetta classicamente.

Ma in questo caso (trans. esibile)  $J \neq 1$  e questo porta a una violazione delle WI, cioè a un'ANOMALIA.

Riscriviamo lo Jacobiano come (vedi dopo)

$$J[\beta, A] = e^{-\int dx \beta(x) A[A](x)}$$

Prendendo  $\beta \ll 1$  :

$$\begin{aligned} \underline{Z[A]} &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S} \left( 1 + \int dx \beta(x) [\partial_\mu j_A^\mu - 2imP - A[A]] \right) \\ &= \underline{Z[A]} + \int dx \beta(x) \langle \partial_\mu j_A^\mu - 2imP - A[A] \rangle_A \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \langle j_A^\mu \rangle_A = 2im \langle P \rangle + A[A] \quad \text{ANOMALOUS AWI}$$

Metodo di Fujikawa per calcolare lo Jacobiano :

$\mathcal{D}$  è HERM.  $\rightarrow$  autovalori REALI

$$\mathcal{D} \phi_n = \lambda_n \phi_n \quad \lambda_n \in \mathbb{R} \quad \phi_n(x) = \langle x | n \rangle$$

Il set di autofunz. è ortonormale e completo :

$$\begin{aligned} \int dx \phi_m^\dagger(x) \phi_n(x) &= \int dx \langle m | x \rangle \langle x | n \rangle = \langle m | n \rangle = \delta_{mn} \\ \sum_n \phi_n(x) \phi_n^\dagger(y) &= \delta(x-y) \end{aligned}$$

Espandiamo  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  in autofunz. di  $\mathcal{D}$

$$\psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x) = \sum_n a_n \langle x | n \rangle$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_m \phi_m^\dagger(x) \bar{b}_m = \sum_m \langle m | x \rangle \bar{b}_m$$

↑  
metriche di cambio  
di base

$a_n, \bar{b}_m$  sono variabili di Grassmann

$\phi_n$  sono spinori di Dirac in rap. R del gruppo G

Prendiamo la misura:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} &= \prod_n da_n \prod_m d\bar{b}_m \left( \underbrace{\det \langle m|x \rangle \cdot \det \langle x|n \rangle}_{\det \langle m|n \rangle = 1} \right)^{-1} \end{aligned}$$

↑  
numeri  
di Grassmann

$$= \prod_n da_n \prod_m d\bar{b}_m$$

Azione:

$$\int dx \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi = \sum_n (i \lambda_n - m) \bar{b}_n a_n$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \det(i \not{D} - m) &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{\int dx \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi} = \int \prod_n da_n d\bar{b}_n e^{\sum_n (i \lambda_n - m) \bar{b}_n a_n} \\ &= \prod_n (i \lambda_n - m) \end{aligned}$$

Vediamo come trasformano  $a_n$  e  $\bar{b}_m$  sotto trasf. esat.

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \sum_n a'_n \psi_n(x) \\ &= (1 + i \beta(x) \gamma_5) \sum_m a_m \psi_m(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x) &= \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

↕ usiamo o.n. della base  $\{\psi_n\}$

$$a'_n = \sum_m C_{nm} a_m$$

con  $C_{nm} = \delta_{nm} + i \int dx \beta(x) \psi_n^\dagger \gamma_5 \psi_m$

$$\bar{b}'_m = \sum_k C_{km} \bar{b}_k$$

(Variabili di Grassmann)

$$\prod_n da'_n = (\det C)^{-1} \prod_n da_n$$

$$\prod_m d\bar{b}'_m = (\det C)^{-1} \prod_m d\bar{b}_m$$

Nel caso della QED,

$\bar{b}$  trasforma con  $(C^{-1})^t$

$$[ \rightarrow \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} ]$$

$$\Rightarrow D\psi' D\bar{\psi}' = (\det C)^{-2} D\psi D\bar{\psi} \Rightarrow J[\beta, A] = (\det C)^{-2}$$

$$\text{Ora } \det C = e^{\text{Tr} \ln C} \quad e \quad \ln(1+\xi) = \xi + O(\xi^2)$$

$$\begin{aligned} J[\beta, A] &= e^{-2\text{Tr} \ln C} = e^{-2\text{Tr} \ln (\delta_{nm} + i \int dx \beta(x) \psi_n^\dagger(x) \gamma_5 \psi_m(x))} \simeq \\ &\simeq e^{-2\text{Tr} i \int dx \beta(x) \psi_n^\dagger(x) \gamma_5 \psi_m(x)} \\ &= e^{-2i \int dx \beta(x) \underbrace{\sum_n \psi_n^\dagger(x) \gamma_5 \psi_n(x)}_{\text{Mal definita:}}} \end{aligned}$$

$$\sum_n \psi_n^\dagger \gamma_5 \psi_n = \text{tr}_{\text{Spin. ind.}} (\gamma_5 \underbrace{\sum_n \psi_n^\dagger \psi_n}_{\delta(x-x)}) \sim \text{tr} \gamma_5 \cdot \delta(0) \quad \begin{matrix} "0" & " \infty " \end{matrix}$$

→ necessità di REGOLARIZZARE

Idea di Fujikawa: usare un CUTOFF GAUSSIANO

$$\begin{aligned} \sum_n \psi_n^\dagger(x) \gamma_5 \psi_n(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \psi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\lambda_n^2/M^2} \psi_n(x) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \psi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-\not{D}^2/M^2} \psi_n(x) \end{aligned}$$

per preservare GAUGE INVARIANCE (qto farà sì che Jacob. dipenda da  $A_\mu$  anche se la trasf. di variabili di integraz. non dipende da esso)

Se scegliamo  $f(\not{D}^2/M^2)$ , allora otteniamo

Jacob = 1. Però tale regolarizzazione rompe l'INV. DI GAUGE.

Si può generalizzare la regolarizzazione:

$$\sum_n \psi_n^\dagger \gamma_5 \psi_n \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \psi_n^\dagger \gamma_5 f(\not{D}^2/M^2) \psi_n$$

$$\text{con } f(y) \text{ t.c. } f^{(n)}(y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

$$e \quad f(0) = 1$$

Calcoliamo la somma regolarizzata nello sp. di Fourier :

$$\varphi_n(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \tilde{\varphi}_n(k)$$

$$v^T A w = \text{tr } v^T A w = \text{tr } A w v^T$$

$$\left\langle \sum_n \varphi_n^\dagger \gamma_5 \varphi_n \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \sum_n \tilde{\varphi}_n^\dagger(q) e^{-iqx} \gamma_5 f\left(\frac{\not{D}^2}{n^2}\right) e^{ikx} \tilde{\varphi}_n(k)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{-iqx} \text{tr} \gamma_5 f\left(\frac{\not{D}^2}{n^2}\right) \underbrace{\sum_n \tilde{\varphi}_n(x) \tilde{\varphi}_n^\dagger(q)}_{(2\pi)^d \delta(k-q)} e^{ikx}$$

↑  
traccia su indici  
spinoriali e di rep. R

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx} \text{tr} \left[ \gamma_5 f\left(\frac{\not{D}^2}{n^2}\right) \right] e^{ikx}$$

$$\not{D}^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = \left( \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} + \frac{1}{2} [ \gamma^\mu, \gamma^\nu ] \right) D_\mu D_\nu =$$

$$= -D^2 + \frac{i}{4} [ \gamma^\mu, \gamma^\nu ] F_{\mu\nu}$$

Inoltre  $e^{-ikx} F(\not{\partial}) e^{ikx} = F(\not{\partial}_\mu + i k_\mu)$

$$\left\langle \sum_n \varphi_n^\dagger \gamma_5 \varphi_n \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{tr} \left[ \gamma_5 f \left( - \frac{(\not{D}_\mu + i k_\mu)(\not{D}_\mu + i k_\mu)}{n^2} + i \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}}{2n^2} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{tr} \left[ \gamma_5 f \left( \frac{k^2}{n^2} - \frac{2i k_\mu \not{D}_\mu + D^2}{n^2} + i \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}}{2n^2} \right) \right]$$

- $\text{tr } \gamma_5 = 0$ ,  $\text{tr } \gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_l} = 0$  se  $l \neq d$ ,  
 $\text{tr } \gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_d} = i^{\frac{3d}{2}} 2^{d/2} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_d}$  ( $\epsilon^{12\dots d} = 1$ )

• espandiamo  $f$  in Taylor attorno a  $k^2/n^2$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i^{\frac{3d}{2}} 2^{d/2}}{(\frac{d}{2})! (2n^2)^{d/2}} f^{(d/2)}(k^2/n^2) \epsilon^{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \dots \mu_{d/2} \nu_{d/2}} \text{tr } i F_{\mu_1 \nu_1} \dots i F_{\mu_{d/2} \nu_{d/2}}$$

Sopran's solo in fermions at leading order in  $1/n^2$

$\leftarrow k \rightarrow Mk$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i^{\frac{3d}{2}} i^{d/2}}{(\frac{d}{2})!} f^{(d/2)}(k^2) \epsilon^{\mu_1 \dots \nu_{d/2}} \text{tr } F_{\mu_1 \nu_1} \dots F_{\mu_{d/2} \nu_{d/2}} + \mathcal{O}(1/n)$$

$$= \epsilon^{\mu_1 \dots \nu_{d/2}} \text{tr } F \dots F \frac{1}{(d/2)!} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} f^{(d/2)}(k^2)$$

coord. polar

$$\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty \frac{k^{d-1} dk}{(2\pi)^d} f^{(d/2)}(k^2)$$

$r = k^2$   
 $dr = 2k dk$

$$\frac{\pi^{d/2}}{(\frac{d}{2}-1)!} \int_0^\infty \frac{r^{d/2-1} dr}{(2\pi)^d} f^{(d/2)}(r) = \frac{(-1)^{d/2}}{2^d \pi^{d/2}}$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty r^{n-1} f^{(n)}(r) dr = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty \left[ \frac{d}{dr} (r^{n-1} f^{(n-1)}(r)) - (n-1) r^{n-2} f^{(n-1)}(r) \right] dr$$

$$= - \frac{(n-1)}{(n-1)!} \int_0^\infty r^{n-2} f^{(n-1)}(r) dr = \dots = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \int_0^\infty f'(r) dr =$$

$$= (-1)^{n-1} f \Big|_0^\infty = (-1)^n$$

$$" \sum_n \varphi_n^\dagger \gamma_5 \psi_n " = \epsilon^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_{d/2} \nu_{d/2}} \text{tr } F_{\mu_1 \nu_1} \dots F_{\mu_{d/2} \nu_{d/2}} \frac{(-1)^{d/2}}{2^d (\frac{d}{2})! \pi^{d/2}}$$



$$J[\beta, A] = e^{-2i \int dx \beta(x) \sum_n \psi_n^\dagger \gamma_5 \psi_n}$$

$$J[\beta, A] = e^{-\int dx \beta(x) A[A](x)}$$

$$\Rightarrow A[A] = 2i \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{d/2} \nu_{d/2}} \text{tr} F_{\mu_1 \nu_1} \dots F_{\mu_{d/2} \nu_{d/2}} \frac{(-1)^{d/2}}{2^d \left(\frac{d}{2}\right)! \pi^{d/2}}$$

$$\begin{cases} d=4 & \frac{1}{16 \cdot 2 \cdot \pi^2} = \frac{1}{32\pi^2} \\ d=2 & \frac{-1}{4 \cdot 1 \cdot \pi} = -\frac{1}{4\pi} \end{cases}$$

Euclidean

↓

Per  $d=4$

$$A[A] = \frac{i}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \rightarrow$$

$$-\frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad (\text{Lecture 22; Singlet anom.})$$

risultato trovato col calcolo dei correlatori

↓

(Lecture 20)

Per  $d=2$

$$A[A] = -\frac{i}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \text{caso abeliano}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\epsilon^{01} = +1)$$

Continuazione a Minkowski

$$\partial_0 = i \partial_d$$

$$A_0 = i A_d$$

$$d=4: \quad \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = 4! (-) \text{tr} F_{41} F_{23} = 4! i \text{tr} F_{01} F_{23} = i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad \text{MINK.}$$

$$d=2: \quad \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2 F_{12} = 2 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) = -2i (\partial_1 A_0 - \partial_0 A_1) = 2i (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) = 2i F_{01} = +i \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \text{MINK.}$$

conversione  
 $\epsilon^{01} = +1$

## INDEX & ANOMALY

Il calcolo della Jacobiana col  $P_1$  corrisponde al calcolo dell' INDICE dell' OP. DI DIRAC in una data chiralità.

In spazio Euclideo

$$D\psi_n = \lambda_n \psi_n$$

$\{\psi_n\}$  è completa e o.n.

$\Downarrow$

$$D(\gamma_5 \psi_n) = -\gamma_5 D\psi_n = -\lambda_n (\gamma_5 \psi_n)$$

$\Rightarrow$  se  $\psi_n$  è autof. con autoval  $\lambda_n$ , allora  $\gamma_5 \psi_n$  è autof. con autov.  $-\lambda_n$ .

Qto ci dice anche che le autofunzioni di  $D$  con autovalore non-nullo non possono avere chiralità definita!

$\Rightarrow$  Se  $\lambda_n \neq 0$  allora  $\psi_n$  e  $\gamma_5 \psi_n$  sono ORTOGONALI, cioè  $(\psi_n, \gamma_5 \psi_n) = \int dx \psi_n^\dagger(x) (\gamma_5 \psi_n(x)) = 0$

$$\begin{aligned} \text{In fatti: } (\gamma_5 \psi_n, D\psi_n) &= \lambda_n (\gamma_5 \psi_n, \psi_n) \\ &= (D\gamma_5 \psi_n, \psi_n) = -\lambda_n (\gamma_5 \psi_n, \psi_n) \Rightarrow \lambda_n (\gamma_5 \psi_n, \psi_n) = 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$  questo non è necessariamente vero in gli ZERO MODI, cioè  $\psi_n^0$  t.c.  $D\psi_n^0 = 0$ :

in pto caso  $\psi_n^0$  e  $\gamma_5 \psi_n^0$  sono autof. relative

allo stesso autovalore ( $\lambda_n = 0$ ) Inoltre ora possiamo avere autofun. a chiralità definita (in tal caso  $\psi_n^0$  e  $\gamma_5 \psi_n^0$  sono proporzionali).

questo è vero in loro combinazioni lineari, in part.

$$\psi_{n+}^0 = \frac{1+\gamma_5}{2} \psi_n^0 \quad \text{e} \quad \psi_{n-}^0 = \frac{1-\gamma_5}{2} \psi_n^0$$

$\rightarrow \psi_{n\pm}^0$  sono anche autovett. di  $\gamma_5$  con autov.  $\pm 1$ .

Torniamo al calcolo dello *Jacobiano*:

$$J[\beta] = e^{-2i \int dx \beta(x) \underbrace{\sum_n \psi_n^\dagger(x) \gamma_5 \psi_n(x)}_{\rightarrow \text{averemo calcolato}} : \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}$$

- consideriamo  $J$  valutato in  $\beta(x) = \beta \text{ cost.}$ ; allora

$$\int dx \sum_n \psi_n^\dagger(x) \gamma_5 \psi_n(x) = \sum_n \int dx \psi_n^\dagger(x) (\gamma_5 \psi_n(x)) =$$

$$= \sum_n \int dx \psi_n^{o\dagger}(x) \gamma_5 \psi_n^o(x) =$$

↑  
somma sugli zero-mod.

$$= \sum_n \underbrace{\int dx \psi_{n+}^{o\dagger}(x) \psi_{n+}^o(x)}_{=1 \text{ (o.n.)}} - \sum_n \int dx \psi_{n-}^{o\dagger}(x) \psi_{n-}^o(x)$$

$$= n_+ - n_- \equiv \text{ind } D_+$$

$$D_+ = D\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)$$

Col conto sull'anomalia otteniamo *tenendo un altro n'ult.*  
in  $\text{ind } D_+$ , che deve coincidere

$$\text{ind } D_+ = \frac{1}{32\pi^2} \int dx \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{M_4} \text{tr} F \wedge F$$

↑  
**Teorema di ATIYAH-SINGER** (dimostrato su manifold compatti)

↓  
in  $\mathbb{R}^4$  dobbiamo assumere che

$$A_\mu \rightarrow i \tilde{U}^\dagger \partial_\mu U \quad \text{a } x \rightarrow \infty$$