

Processi Stocastici

Processi Stocastici

- Processo stocastico
 - ▶ modello per un fenomeno aleatorio **dinamico**
 - ▶ dinamico: in **tempo** o **spazio** o altro
- Informazione collegata a un processo
- Categorie generali di processi
 - ▶ **martingale**
 - ▶ processi di **Markov**
- esempi importanti
 - ▶ moto Browniano
 - ▶ processo di Poisson

Processi Stocastici

- **Processo stocastico**: su uno spazio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, una famiglia di va

$$(X_\alpha)_{\alpha \in I}$$

- Tipicamente I : insieme di **indici temporali**
 - ▶ $I = \mathbb{Z}$ o $I = \mathbb{N} \rightsquigarrow$ processo stocastico a **tempo discreto**; $X_n =$ valore del processo all'istante n
 - ▶ $I = \mathbb{R}$ o $I = [0, +\infty)$ o $I = [0, T]$ $\rightsquigarrow$ processo stocastico a **tempo continuo**; $X_t =$ valore del processo al tempo t
- ogni X_α è una va; oppure X_α vettore di $\mathbb{R}^d$ oppure in uno spazio generale $(E, \mathcal{E})$

Processi Stocastici

- ESERCIZIO.

- ▶ X_t prezzo azionario al tempo t
- ▶ X_t numero di sinistri registrato fino a t
- ▶ X_t danno di portafoglio cumulato fino a t
- ▶ X_t temperatura al tempo t in una certa località
- ▶ $X_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ temperatura in un certo istante nella latitudine α , longitudine β , altezza dal suolo γ
- ▶ X_t rating di una compagnia al tempo t
- ▶ X_n tempo registrato dall' n -esimo atleta (in una gara)
- ▶ ...

Processi Stocastici

- $(X_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico a tempo continuo

- ▶ per ogni $t \geq 0$, X_t è una va

- ▶ per ogni $\omega \in \Omega$,

$$t \rightarrow X_t(\omega)$$

è una **traiettoria** del processo

- ▶ spesso si richiedono proprietà aggiuntive sulle traiettorie: misurabilità, continuità (a dx, a sx), integrabilità

Processi Stocastici

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità
 $I = [0, +\infty)$ (definizioni simili negli altri casi)
 - ▶ per ogni $t \geq 0$, sia $\mathcal{F}_t$ σ -algebra con $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$
 - ▶ $\mathcal{F}_t$: informazione disponibile al tempo t
 - ▶ l'informazione non viene persa: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ se $0 \leq s < t$
- Una famiglia $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ di σ -algebre con queste caratteristiche è una **filtrazione** $\rightsquigarrow$ modello per il **flusso di informazione**;
 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ è uno **spazio di probabilità filtrato**

Processi Stocastici

- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ spazio di probabilità filtrato; un processo stocastico $(X_t)_{t \geq 0}$ è **adattato** alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)$ se

X_t è $\mathcal{F}_t$ -misurabile, per ogni $t \geq 0$

- ▶ se $0 \leq s \leq t$, X_s è $\mathcal{F}_t$ -misurabile $\rightsquigarrow$ X_s è parte dell'informazione disponibile in t

- **Filtrazione naturale** generata da un processo $(X_t)_{t \geq 0}$:

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq t)$$

$\rightsquigarrow \mathcal{F}_t^X$ osservazione del processo X_u fino a t

$\rightsquigarrow$ **più piccola filtrazione che rende (X_t) adattato**

Martingale

- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ spazio di probabilità filtrato
il processo stocastico $(X_t)_{t \geq 0}$ è una **martingala** se

① (X_t) è adattato a $(\mathcal{F}_t)$

② $X_t \in L^1$ per ogni $t \geq 0$

③ per ogni $0 \leq s < t$

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \text{ q.c.}$$

Martingale

- Osservazioni

- ▶ martingala $\equiv$ processo “costante in media”
- ▶ X_t = guadagno cumulato in un **gioco equo**
- ▶ se (3) è sostituita da $E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$ q.c. $\rightsquigarrow$ **sottomartingala** $\rightsquigarrow$ gioco favorevole
- ▶ se (3) è sostituita da $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$ q.c. $\rightsquigarrow$ **sopramartingala** $\rightsquigarrow$ gioco favorevole

Processi Markoviani

- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ spazio di probabilità filtrato
il processo stocastico $(X_t)_{t \geq 0}$ è **Markoviano** se

① (X_t) è adattato a $(\mathcal{F}_t)$

② per ogni $0 \leq s < t$, per ogni $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile tale che $g(X_t) \in L^1$

$$E[g(X_t) | \mathcal{F}_s] = E[g(X_t) | X_s] \text{ q.c.}$$

- $E[g(X_t) | X_s] = P_{s,t}(X_s)$; se $P_{s,t} \equiv P_{t-s}$, il processo è Markoviano omogeneo

Processi Markoviani

- Osservazioni
 - ▶ solo il valore corrente conta per valutare il futuro
 - ▶ “futuro e passato sono indipendenti condizionatamente al presente”
 - ▶ modelli Markoviani sono “trattabili” $\rightsquigarrow$ finito dimensionali

Processi a Incrementi Indipendenti e Stazionari

- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ spazio di probabilità filtrato
il processo stocastico $(X_t)_{t \geq 0}$ è a **incrementi indipendenti e stazionari** se
 - ① (X_t) è adattato a $(\mathcal{F}_t)$
 - ② per ogni $0 \leq s < t$, $X_t - X_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$
 - ③ per ogni $0 \leq s < t$ ed $h > 0$, $X_t - X_s$ ha la stessa legge di $X_{t+h} - X_{s+h}$
- Ogni processo di questo tipo è Markoviano omogeneo

Processi Stocastici

- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ spazio di probabilità filtrato
 $(W_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico adattato a $(\mathcal{F}_t)$ è un **moto Browniano/processo di Wiener** se
 - ① $W_0 = 0$ q.c.
 - ② le traiettorie sono continue, q.c.
 - ③ il processo ha **incrementi indipendenti**: per ogni $0 \leq s < t$

$$W_t - W_s \text{ indipendente da } \mathcal{F}_s$$

- ④ per ogni $0 \leq s < t$

$$W_t - W_s \sim N(0, t - s)$$

- Modello base per i processi di **diffusione** $\rightsquigarrow$ prezzi azionari
- Il moto Browniano è una martingala e un processo di Markov

Processi Stocastici

- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ spazio di probabilità filtrato
 $(N_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico adattato a $(\mathcal{F}_t)$ è un **processo di Poisson omogeneo di parametro $\lambda > 0$** se

- 1 $N_0 = 0$ q.c.
- 2 le traiettorie sono continue, q.c.
- 3 il processo ha **incrementi indipendenti**: per ogni $0 \leq s < t$

$$N_t - N_s \text{ indipendente da } \mathcal{F}_s$$

- 4 per ogni $0 \leq s < t$

$$N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t - s))$$

- Modello base per i **processi di conta**
- Il processo di Poisson è un processo di Markov; il processo di Poisson compensato

$$M_t = N_t - \lambda t$$

è una martingala