

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II

A.A. 2025/2026 - INGEGNERIA

SIMULAZIONE DEL 17.12.2025

1. Determinare TUTTI i punti stazionari della funzione

$$F(x, y, z) = ((3x - 2y)^2 - (3x + 2y)^2)z^2 - 4xz,$$

osservare che l'origine è un punto stazionario e determinare se $(0, 0, 0)$ è un punto di massimo o un punto di minimo locale per F .

2. Data la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5n \frac{x^{n+3}}{(x+1)^n} \quad x \geq 0,$$

trovare l'insieme di convergenza puntuale, l'insieme di convergenza uniforme e la somma ove possibile.

3. Sia E l'insieme limitato di $\mathbb{R}^3$ delimitato dai piani coordinati e dal piano $x + 2y + 3z = 4$. Calcolare

$$\int_E (5z + 3y^2) dx dy dz.$$

4. Trovare una 3-parametrizzazione σ dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\}.$$

Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = 4x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + 2e^{x^2+1} x^{12} \log(y^2 + 5) dx \wedge dy$$

su $\partial\sigma$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. I punti stazionari di F sono i punti in cui il suo gradiente è nullo. Osserviamo che

$$F(x, y, z) = (3x - 2y - 3x - 2y)(3x - 2y + 3x + 2y)z^2 - 4xz \quad (0.1)$$

$$= -24xyz^2 - 4xz. \quad (0.2)$$

Siccome

$$\nabla F(x, y, z) = (-24yz^2 - 4z, -24xz^2, -48xyz - 4x),$$

i punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} z(6yz + 1) = 0 \\ xz^2 = 0 \\ x(12yz - 1) = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione: $x = 0$ o $z = 0$. Se $z = 0$ anche la prima equazione è soddisfatta e dalla terza equazione otteniamo $x = 0$. Quindi tutti i punti $(0, y, 0)$ con $y \in \mathbb{R}$ sono punti stazionari. Se $x = 0$ anche la terza equazione è soddisfatta e dalla prima equazione troviamo che $z = 0$ o $6yz + 1 = 0$. Quindi i punti stazionari sono: $(0, y, 0)$ con $y \in \mathbb{R}$ e $(0, y, -\frac{1}{6y})$ con $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Per determinare la natura di $(0, 0, 0)$ quale punto stazionario osserviamo che $F(0, 0, 0) = 0$. Siccome $F(x, 0, x) = -4x^2 < 0$ per $x \neq 0$, il punto $(0, 0, 0)$ non è punto di minimo. Essendo $F(x, 0, -x) = 4x^2 > 0$ per $x \neq 0$ concludiamo che $(0, 0, 0)$ non è punto di massimo.

La versione gratis di chatgpt, senza registrazione, ha trovato inizialmente solo la prima famiglia di punti critici $(0, y, 0)$ con $y \in \mathbb{R}$, chiedendo se non ce ne sono altri ha ribadito che gli unici punti critici sono questi. L'errore stava nel caso $x = 0$. Scrivendo che il caso $x = 0$ era sbagliato ho ottenuto la risposta completa.

Esercizio 2. Osserviamo che si tratta di una serie di funzioni di termine generale $5n \frac{x^{n+3}}{(x+1)^n}$ ben definito per tutti gli $x \geq 0$. Se $x = 0$ tutti i termini sono nulli quindi anche la somma della serie è uguale a 0.

Osserviamo inoltre che possiamo scrivere

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5n \frac{x^{n+3}}{(x+1)^n} = 5x^3 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{x+1} \right)^n.$$

Per studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{x+1} \right)^n$ conviene effettuare la sostituzione $t =$

$\frac{x}{x+1}$. La serie ottenuta, $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$, ha raggio di convergenza $R = 1$ (infatti $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$), quindi la serie converge per $t \in (-1, 1)$ e converge uniformemente in ogni intervallo $[-r, r]$ con $0 < r < 1$. La serie non converge per $t = \pm 1$ (non soddisfa la condizione necessaria).

Per calcolare la sua somma osserviamo che $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n = t \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$ e che $nt^{n-1} = (t^n)'$.

Siccome la serie che ci interessa si ottiene derivando termine a termine la serie geometrica, nell'insieme di convergenza uniforme, la sua somma è uguale alla derivata della somma della

serie geometrica. Essendo $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ per $t \in (-1, 1)$, deduciamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} = \left(\frac{1}{1-t} \right)' = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

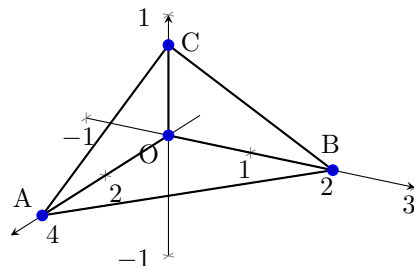
Di conseguenza $\sum_{n=1}^{\infty} n t^n = \frac{t}{(1-t)^2}$ e la somma della serie data è

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5n \frac{x^{n+3}}{(x+1)^n} = 5x^3 \frac{\frac{x}{x+1}}{\left(1 - \frac{x}{x+1}\right)^2} = 5x^4(x+1).$$

Resta ancora da scrivere in termini di x l'insieme di convergenza puntuale e l'insieme di convergenza uniforme. Essendo $t = \frac{x}{x+1}$ troviamo che per ogni $x \geq 0$ si ha $0 \leq t \leq 1$, quindi la serie converge puntualmente in $[0, +\infty)$. La serie data converge uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato $[0, M]$ con $M > 0$. Infatti, se $x \in [0, M]$ allora $t \in [0, r]$ con $r = \frac{M}{M+1}$. La serie non converge uniformemente su tutto $[0, +\infty)$.

Chatgpt ha risolto l'esercizio senza difficoltà.

Esercizio 3. L'insieme E è un tetraedro. Il piano $x + 2y + 3z = 4$ interseca il piano $z = 0$ nella retta $x + 2y = 4 \wedge z = 0$, interseca il piano $y = 0$ nella retta $x + 3z = 4 \wedge y = 0$ e il piano $x = 0$ nella retta $2y + 3z = 4 \wedge x = 0$. Troviamo dunque i vertici del tetraedro: $O = (0, 0, 0)$, $A = (4, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ e $C = (0, 0, 4/3)$.

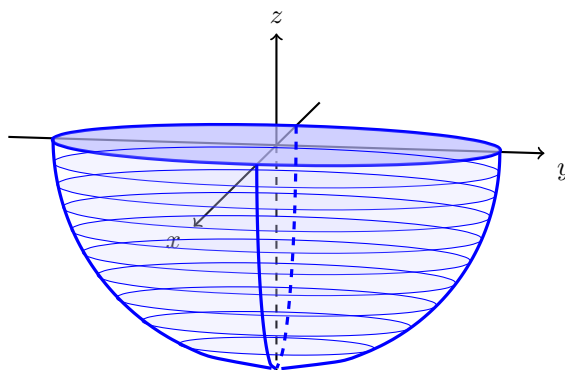


Usando il Teorema di Fubini otteniamo

$$\begin{aligned} \int_E (5z + y^2) dx dy dz &= \int_0^2 \left(\int_0^{4-2y} \left(\int_0^{\frac{1}{3}(4-2y-x)} (5z + y^2) dz \right) dx \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{4-2y} \left(\frac{5}{2} \frac{1}{9} (4-2y-x)^2 + \frac{1}{3} y^2 (4-2y-x) \right) dx \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{5}{18} \frac{1}{3} (4-2y)^3 + \frac{1}{3} \frac{1}{2} y^2 (4-2y)^2 \right) dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^2 \left(\frac{10}{9} (2-y)^3 + (2-y)^2 y^2 \right) dy = \frac{5}{27} 2^4 + \frac{2}{3} \int_0^2 (2-y)^2 y^2 dy = \frac{496}{135}. \end{aligned}$$

Chatgpt ha fatto il calcolo scegliendo come integrale esterno quello in z e ha fornito il risultato $\frac{688}{135}$. Chiedendo di controllare i passaggi algebrici ha ribadito che si ottiene $\frac{688}{135}$. Dopo aver detto che il mio risultato era $\frac{496}{135}$, ha rifatto i calcoli ottenendo $\frac{496}{135}$.

Esercizio 4.



L'insieme E è la parte di un ellissoide situata sotto il piano $z = 0$. Una sua parametrizzazione è data dalle coordinate sferiche modificate: $\sigma(\rho, \varphi, \theta) = (x, y, z)$ con

$$\begin{cases} 2x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi, \end{cases}$$

dove $\rho \in [0, 1]$, $\varphi \in [\pi/2, \pi]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Si ha

$$\det J\sigma(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{2}\rho^2 \sin \varphi > 0$$

per $\rho > 0$, $\varphi \in (0, \pi)$ e $\theta \in (0, 2\pi)$. Per il calcolo dell'integrale conviene usare il teorema di Stokes-Cartan:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega,$$

che in questo caso particolare è il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_E \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz,$$

con $F(x, y, z) = (4x^3, y^3, 2e^{x^2+1}x^{12} \log(y^2 + 5))$. Si ha

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(2e^{x^2+1}x^{12} \log(y^2 + 5)) = 12x^2 + 3y^2.$$

Usando il cambio di coordinate dato da σ si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_E \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^1 \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\pi} 3\rho^2 \sin^2 \varphi \frac{1}{2}\rho^2 \sin \varphi d\theta d\varphi d\rho \\ &= \frac{3}{5}\pi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{3}{5}\pi \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{3}{5}\pi \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5}\pi. \end{aligned}$$

Chatgpt ha risolto l'esercizio senza difficoltà.

L'anno scorso non avrebbe passato la prova scritta.