

# Processi Stocastici

# Processi Stocastici

- Processo stocastico
  - ▶ modello per un fenomeno aleatorio **dinamico**
  - ▶ dinamico: in tempo o spazio o altro
- Informazione collegata a un processo
- Categorie generali di processi
  - ▶ martingale
  - ▶ processi di Markov
- esempi importanti
  - ▶ moto Browniano
  - ▶ processo di Poisson

# Processi Stocastici

- Processo stocastico: su uno spazio  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , una famiglia di va

$$\boxed{(X_\alpha)_{\alpha \in I}}$$

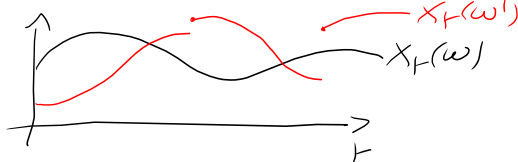
- Tipicamente  $I$ : insieme di indici temporali
  - ▶  $I = \mathbb{Z}$  o  $I = \mathbb{N} \rightsquigarrow$  processo stocastico a tempo discreto;  $X_n =$  valore del processo all'istante  $n$
  - ▶  $I = \mathbb{R}$  o  $I = [0, +\infty)$  o  $I = [0, T]$   $\rightsquigarrow$  processo stocastico a tempo continuo;  $X_t =$  valore del processo al tempo  $t$
- ogni  $X_\alpha$  è una va; oppure  $X_\alpha$  vettore di  $\mathbb{R}^d$  oppure in uno spazio generale  $(E, \mathcal{E})$

# Processi Stocastici

- ESERCIZIO.

- ▶  $X_t$  prezzo azionario al tempo  $t$
- ▶  $X_t$  numero di sinistri registrato fino a  $t$
- ▶  $X_t$  danno di portafoglio cumulato fino a  $t$
- ▶  $X_t$  temperatura al tempo  $t$  in una certa località
- ▶  $X_{(\alpha,\beta,\gamma)}$  temperatura in un certo istante nella latitudine  $\alpha$ , longitudine  $\beta$ , altezza dal suolo  $\gamma$
- ▶  $X_t$  rating di una compagnia al tempo  $t$
- ▶  $X_n$  tempo registrato dall' $n$ -esimo atleta (in una gara)
- ▶ ...

# Processi Stocastici



- $(X_t)_{t \geq 0}$  processo stocastico a tempo continuo

▶ per ogni  $t \geq 0$ ,  $X_t$  è una va

▶ per ogni  $\omega \in \Omega$ ,  $[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $t \rightarrow X_t(\omega)$

è una traiettoria del processo

▶ spesso si richiedono proprietà aggiuntive sulle traiettorie:  
misurabilità, continuità (a dx, a sx), integrabilità

# Processi Stocastici

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  spazio di probabilità  
 $I = [0, +\infty)$  (definizioni simili negli altri casi)
  - ▶ per ogni  $t \geq 0$ , sia  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebra con  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$
  - ▶  $\mathcal{F}_t$ : informazione disponibile al tempo  $t$
  - ▶ l'informazione **non viene persa**:  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  se  $0 \leq s < t$
- Una famiglia  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  di  $\sigma$ -algebre con queste caratteristiche è una **filtrazione**  $\rightsquigarrow$  modello per il **flusso di informazione**;  
 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$  è uno **spazio di probabilità filtrato**

# Processi Stocastici

- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$  spazio di probabilità filtrato; un processo stocastico  $(X_t)_{t \geq 0}$  è **adattato** alla filtrazione  $(\mathcal{F}_t)$  se

$X_t$  è  $\mathcal{F}_t$ -misurabile, per ogni  $t \geq 0$

$$X_s \in \mathcal{F}_s \text{ MISURABILE, } \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

- ▶ se  $0 \leq s \leq t$ ,  $X_s$  è  $\mathcal{F}_t$ -misurabile  $\rightsquigarrow$   $X_s$  è parte dell'informazione disponibile in  $t$

- **Filtrazione naturale** generata da un processo  $(X_t)_{t \geq 0}$ :

$$\underline{\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq t)}$$

$\rightsquigarrow \mathcal{F}_t^X$  osservazione del processo  $X_u$  fino a  $t$

$\rightsquigarrow$  più piccola filtrazione che rende  $(X_t)$  adattato

$$(Y_t)$$

$$\mathcal{F}_t^{(X, Y)} =$$

$$= \sigma(X_u, Y_u, 0 \leq u \leq t)$$

# Martingale

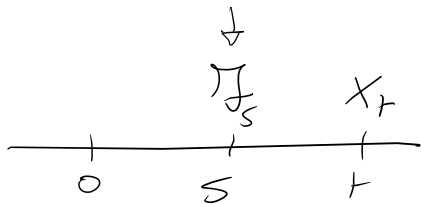
- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$  spazio di probabilità filtrato  
il processo stocastico  $(X_t)_{t \geq 0}$  è una martingala se

①  $(X_t)$  è adattato a  $(\mathcal{F}_t)$

②  $X_t \in L^1$  per ogni  $t \geq 0$

③ per ogni  $0 \leq s < t$

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \text{ q.c.}$$





# Martingale

- Osservazioni

- ▶ martingala  $\equiv$  processo “costante in media”
- ▶  $X_t$  = guadagno cumulato in un **gioco equo**
- ▶ se (3) è sostituita da  $E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$  q.c.  $\rightsquigarrow$  **sottomartingala**  $\rightsquigarrow$  gioco favorevole
- ▶ se (3) è sostituita da  $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$  q.c.  $\rightsquigarrow$  **sopramartingala**  $\rightsquigarrow$  gioco favorevole

# Processi Markoviani

$(E, \mathcal{E})$

$X_t \in E$

- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$  spazio di probabilità filtrato  
il processo stocastico  $(X_t)_{t \geq 0}$  è **Markoviano** se

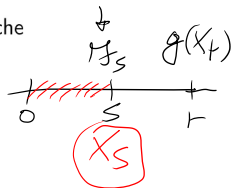
①  $(X_t)$  è adattato a  $(\mathcal{F}_t)$

② per ogni  $0 \leq s < t$ , per ogni  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile tale che  
 $g(X_t) \in L^1$

$$E[g(X_t) | \mathcal{F}_s] = E[g(X_t) | X_s] \text{ q.c.}$$

- $E[g(X_t) | X_s] = P_{s,t}(X_s)$ ; se  $P_{s,t} \equiv P_{t-s}$ , il processo è Markoviano omogeneo

FUNZIONE  
DI  $S, T,$   
 $X_S$



# Processi Markoviani

- Osservazioni

- ▶ solo il valore corrente conta per valutare il futuro
- ▶ “futuro e passato sono indipendenti condizionatamente al presente”
- ▶ modelli Markoviani sono “trattabili”  $\rightsquigarrow$  finito dimensionali

# Processi a Incrementi Indipendenti e Stazionari

$$(\mathcal{J}_n) \text{ IID} \quad X_n = X_0 + \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \dots + \mathcal{J}_n = X_{n-1} + \mathcal{J}_n$$

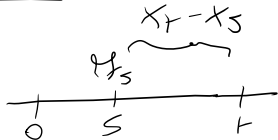
- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$  spazio di probabilità filtrato  
il processo stocastico  $(X_t)_{t \geq 0}$  è a incrementi indipendenti e stazionari se (LEVY)

- 1  $(X_t)$  è adattato a  $(\mathcal{F}_t)$

INCREMENTO

- 2 per ogni  $0 \leq s < t$ ,  $X_t - X_s$  è indipendente da  $\mathcal{F}_s$

- 3 per ogni  $0 \leq s < t$  ed  $h > 0$ ,  $X_t - X_s$  ha la stessa legge di  $X_{t+h} - X_{s+h}$



- Ogni processo di questo tipo è Markoviano omogeneo

# Processi Stocastici

- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$  spazio di probabilità filtrato  
 $(W_t)_{t \geq 0}$  processo stocastico adattato a  $(\mathcal{F}_t)$  è un **moto Browniano/processo di Wiener** se

- 1  $W_0 = 0$  q.c.
- 2 le traiettorie sono continue, q.c.
- 3 il processo ha **incrementi indipendenti**: per ogni  $0 \leq s < t$

$$W_t - W_s \text{ indipendente da } \mathcal{F}_s$$

- 4 per ogni  $0 \leq s < t$

$$W_t - W_s \sim N(0, t - s)$$

- Modello base per i processi di diffusione  $\rightsquigarrow$  prezzi azionari
- Il moto Browniano è una martingala e un processo di Markov



# Processi Stocastici

- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$  spazio di probabilità filtrato  
 $(N_t)_{t \geq 0}$  processo stocastico adattato a  $(\mathcal{F}_t)$  è un **processo di Poisson omogeneo di parametro  $\lambda > 0$**  se

①  $N_0 = 0$  q.c.

~~② le traiettorie sono continue, q.c.~~

③ il processo ha incrementi indipendenti: per ogni  $0 \leq s < t$

$$N_t - N_s \text{ indipendente da } \mathcal{F}_s$$

④ per ogni  $0 \leq s < t$

$$N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t-s))$$

- Modello base per i **processi di conta**
- Il processo di Poisson è un processo di Markov; il processo di Poisson compensato

$$M_t = N_t - \lambda t$$

è una martingala

