

Convergenza di Successioni di Variabili Aleatorie

Convergenza di VA

- Definire i vari tipi di convergenza di successioni di variabili aleatorie
 - ▶ quasi certa
 - ▶ in probabilità
 - ▶ in L^p
 - ▶ in distribuzione
- Relazioni tra i vari tipi di convergenza, esempi
- Due risultati classici
 - ▶ Legge dei Grandi Numeri
 - ▶ Teorema del Limite Centrale

Convergenza di VA

$$X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

- Data una successione $(X_n)_{n \geq 1}$ di va su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e una va X

- ▶ [**Convergenza quasi certa**] $X_n \rightarrow X$ q.c. se esiste $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 1$ tale che

SUCCESSIONE NUMERICA

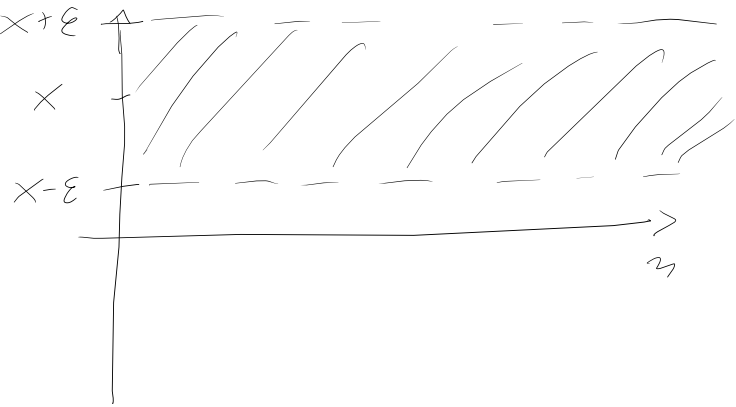
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \text{ per ogni } \omega \in A$$

- ▶ [**Convergenza in probabilità**] $X_n \rightarrow^P X$ se per ogni $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1$$

$$|X_n - X| > \varepsilon \iff X_n < X - \varepsilon \vee X_n > X + \varepsilon$$



Convergenza di VA

- Data una successione $(X_n)_{n \geq 1}$ di va su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e una va X

- ▶ [Convergenza in L^p , $p \geq 1$] quando $X_n, X \in L^p$, $X_n \rightarrow^{L^p} X$ se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_p(X_n, X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E[|X_n - X|^p] = 0$$

- ▶ [Convergenza in distribuzione o legge] $X_n \rightarrow^d X$ se per ogni $x \in \mathbb{R}$ punto di continuità di F_X ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

- Il limite è unico q.c. per convergenza q.c., in probabilità e in L^p ; è unica in legge nel caso di convergenza in legge

$$d_p(X, Y) = \|X - Y\|_p = E[|X - Y|^p]^{1/p}$$

$$\begin{array}{ccc} X_m & \xrightarrow{\phi} & X \\ X_m & \xrightarrow{\phi} & X' \end{array}$$

$$\Rightarrow X =_{\phi} X'$$

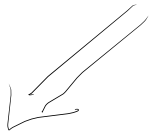
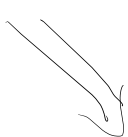
Convergenza di VA

- **Relazione** tra vari tipi di convergenza

- ▶ $X_n \rightarrow X$ q.c. $\Rightarrow X_n \rightarrow^P X$; l'implicazione opposta vale su una sottosuccessione
- ▶ se per $p \geq 1$ riesce $X_n \rightarrow^{L^p} X$, allora
 - 1 $X_n \rightarrow^{L^q} X$ per ogni $1 \leq q \leq p$
 - 2 $X_n \rightarrow^P X$
 - 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} E[|X_n|^p] = E[|X|^p]$
- ▶ $X_n \rightarrow^P X \Rightarrow X_n \rightarrow^d X$; l'implicazione opposta vale se X è degenere

$$X_n \rightarrow X \text{ Q.C.}$$

$$X_n \xrightarrow{L^p} X$$



$$X_n \xrightarrow{L^p} X$$



$$X_n \xrightarrow{L^d} X$$

$$X_n \rightarrow^{L^2} X \quad \Rightarrow \quad X_n \rightarrow^P X$$

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) = E(|X_n - X|^2 > \varepsilon^2)$$

$$\stackrel{\text{MARKOV}}{\leq} \frac{E(|X_n - X|^2)}{\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

Convergenza di VA

- **Convergenza in legge**: coinvolge solo le cdf delle variabili ($\equiv$ le leggi immagine), possono essere anche definite su spazi di prob. diversi! si scrive

$$F_{X_n} \rightarrow^d F_X$$

- le seguenti proposizioni sono **equivalenti**

① $X_n \rightarrow^d X$

② per ogni $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e limitata

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[g(X_n)] = E[g(X)]$$

③ per ogni $B \in \mathcal{B}$ con $P(X \in \text{Fr}(B)) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \in B) = P(X \in B)$$

$$\text{Fr}(B) = \{x\} \\ B = [-\infty, x]$$

Convergenza di VA

- **Convergenza in legge**: coinvolge solo le cdf delle variabili ($\equiv$ le leggi immagine), possono essere anche definite su spazi di prob. diversi! si scrive

$$F_{X_n} \rightarrow^d F_X$$

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

- le seguenti proposizioni sono **equivalenti**

① $X_n \rightarrow^d X$

④ per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$X_n \rightarrow^d X \Leftrightarrow \varphi_{X_n} \rightarrow \varphi_X \text{ PUNTUALMENTE}$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[e^{itX_n}] = E[e^{itX}]$$

⑤ per ogni t in un intorno non degenere di 0 (indipendente da n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[e^{tX_n}] = E[e^{tX}]$$

Convergenza di VA

- ESERCIZIO. [Teorema di Poisson] siano $(X_n)_{n \geq 1}$ con $X_n \sim \text{Binomiale}(n, p_n)$ con $p_n \in (0, 1)$ tale che

$$E[X_n] = np_n \rightarrow \lambda \geq 0$$

$$p_n = \frac{n \cdot p_n}{n} \rightarrow 0$$

allora

$$X_n \rightarrow^d \text{Poisson}(\lambda)$$

$$M_{X_n}(t) \rightarrow M_X(t) \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

Convergenza di VA

- ESERCIZIO. siano $(X_n)_{n \geq 1}$ iid con $X_n \sim U(0,1)$ e poniamo

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

verificare che

▶ $M_n \rightarrow 1$ q.c.

▶ $M_n \xrightarrow{P} 1$

▶ $M_n \xrightarrow{L^2} 1$

▶ $M_n \xrightarrow{d} 1$

Convergenza di VA

- Per una successione $(X_n)_{n \geq 1}$ di va si pone

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{somma parziale}$$

$$\frac{S_n}{n} \quad \text{media empirica}$$

SINISTRI

DANNO TOTALE
(n SINISTRI)

DANNO MEDIO

KOLMOGOROV

- Legge forte dei grandi numeri:** se $(X_n)_{n \geq 1}$ sono iid e $X_n \in L^1$ per ogni n allora

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow E[X_1] \text{ (q.c.) e in } L^1$$

MONTE CARLO

inoltre se $X_n \in L^2$ per ogni n allora

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow^{L^2} E[X_1]$$

- È sufficiente l'indipendenza a coppie delle variabili

Convergenza di VA

- **Teorema del Limite Centrale (CLT)**. Idea: la media empirica di termini casuali "piccoli" si distribuisce normalmente
- **CLT, versione "classica"**: $(X_n)_{n \geq 1}$ successione di va iid con $X_n \in L^2$ per ogni $n \geq 1$,

STANDARDIZZARE

$$E[X_n] = \underline{\mu}, \quad \text{VAR}[X_n] = \underline{\sigma^2}$$

allora

MEDIA O/
VARIANZA
1, $\forall n$

$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow^d N(0,1)$$

$$E(S_n) = n \cdot \mu$$

$$\text{VAR}(S_n) = n \cdot \sigma^2$$

$$E(S_n/n) = \mu$$

$$\text{VAR}(S_n/n) = \sigma^2/n$$

- Quindi $\frac{S_n}{n} \approx N(\mu, \sigma^2/n)$ e $S_n \approx N(n\mu, \sigma^2 n)$

Convergenza di VA

- CLT, versione "moderna": $(X_n)_{n \geq 1}$ successione di va
indipendenti con $X_n \in L^2$ per ogni $n \geq 1$,

$$E[X_n] = 0 \text{ (non restrittivo),} \quad \text{VAR}[X_n] = \sigma_n^2$$

$$u_n^2 = \sigma^2$$

posto $u_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ e se la **condizione di Lindeberg**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_n^2} E[X_i^2; |X_i| \geq \varepsilon u_n] = 0$$

per ogni $\varepsilon > 0$, allora

$$\frac{S_n}{u_n} \rightarrow^d N(0,1)$$

- Basta una ipotesi di indipendenza asintotica per il teorema

$$\underbrace{F_{X_n, X_{n+q}}}_{\text{CONGIUNTA}}$$

$$- \underbrace{F_{X_n} F_{X_{n+q}}}_{\text{CONGIUNTA SE FOSSERO INDIPENDENTI}}$$

$$\parallel \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} \parallel 0$$