

Speranza Matematica

Speranza Matematica

- X va su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; vogliamo definire

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$$

- ▶ **valor medio/atteso** di X
- ▶ **speranza matematica** di X
- ▶ **baricentro** di $X \rightsquigarrow$ misura di **locazione** di X
- ▶ **integrale astratto** di X rispetto a P su Ω

Speranza Matematica

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, X va **semplice**,

$$X = \underbrace{\sum_{i=1}^m c_i 1_{A_i}}$$

con $c_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, m$; si definisce

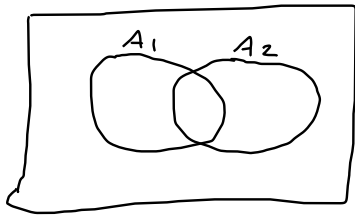
$$E[X] = \int_{\Omega} X dP = \sum_{i=1}^m c_i P(A_i) \in \mathbb{R}$$

- ▶ non dipende dalla rappresentazione di X

$$X = C_1 1_{A_1} + C_2 1_{A_2}$$

$$= C_1 1_{A_1 - A_2} + C_2 1_{A_2 - A_1}$$

$$+ (C_1 + C_2) 1_{A_1 \cap A_2}$$



$$E(X) = C_1 P(A_1) + C_2 P(A_2)$$

$$= C_1 P(A_1 - A_2) + C_2 P(A_2 - A_1) +$$

$$+ (C_1 + C_2) P(A_1 \cap A_2)$$

Speranza Matematica

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, X va **semplice**,

- ESEMPIO.

▶ $X = c$ q.c. (degenere), $E[X] = c$

▶ $X \sim \text{Bernoulli}(p)$,

$$E[X] = p = P(A)$$

▶ X con valori $x_1, \dots, x_n$ e masse $p_1, \dots, p_n$

$$X = \sum x_i \mathbb{1}_{\{X = x_i\}}$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

▶ $X \sim \text{Binomiale}(n, p)$

$$X = 1_{E_1} + \dots + 1_{E_n}$$

con (E_i) indipendenti e $P(E_i) = p$

$$E[X] = np$$

Speranza Matematica

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, X va **nonnegativa**, $X \geq 0$; si definisce

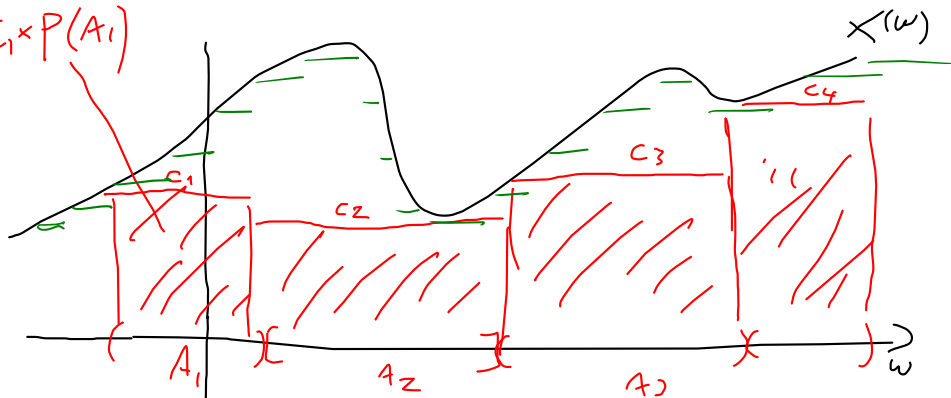
$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\Omega} X dP \\ &= \sup \{ E[Y] \mid Y \text{ va semplice, } 0 \leq Y \leq X \} \in [0, +\infty] \end{aligned}$$

$E[X] = +\infty$ è possibile!

- $X_1, X_2 \geq 0$ va; si può provare che
 - ▶ se $X_1 \leq X_2$ allora $0 \leq E[X_1] \leq E[X_2]$
 - ▶ $E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$
 - ▶ se $X_1 \leq K$ con $K > 0$, allora $E[X] < +\infty$

$$\Omega = \mathbb{R}$$

$$c_1 \times P(A_1)$$



$$Y = c_1 1_{A_1} + c_2 1_{A_2} + \dots$$

$$E[Y] = \boxed{\text{shaded square}}$$

Speranza Matematica

- Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si pone

$$x^+ = \max\{x, 0\},$$

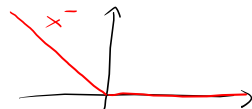
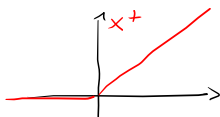
$$x^- = \max\{-x, 0\},$$

e riesce

▶ $x^+, x^- \geq 0$

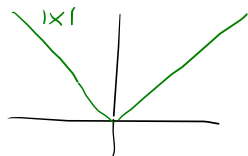
▶ $x = x^+ - x^-, |x| = x^+ + x^- = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

▶ $x^+ \leq |x|, x^- \leq |x|$



parte positiva di x

parte negativa di x



Speranza Matematica

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, X va (qualunque); X è integrabile se

$$E[|X|] < +\infty \Leftrightarrow E[X^+] < +\infty, E[X^-] < +\infty$$

in questo caso si definisce

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP = E[X^+] - E[X^-] \in \mathbb{R}$$

- Per ogni $p \geq 1$

$$\underline{L^p} = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{X \text{ va su } (\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ con } E[|X|^p] < +\infty\}$$

L^p : va p -integrabili

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica

- ▶ [Linearità]: L^p è uno spazio vettoriale;
per ogni $X, Y \in L^1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{l} X, Y \in L^p \\ \Rightarrow \alpha X + \beta Y \in L^p \\ \text{PER OGNI } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y], \quad E[\alpha X] = \alpha E[X]$$

- ▶ [Monotonia], $X, Y \in L^1$, $X \leq Y$ q.c.,

$$\underline{E[X] \leq E[Y]}$$

- ▶ se X è dominata, $|X| \leq Y$ q.c. con $Y \in L^1$ allora $X \in L^1$
- ▶ se $1 \leq p < q$ allora $\underline{L^q \subset L^p}$

$$1 \leq p < q$$

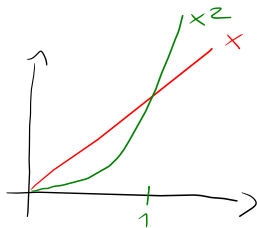
$$\Rightarrow L^q \subset L^p$$

$$E|X|^q < +\infty \Rightarrow E|X|^p < +\infty$$

$$|X|^p = |X|^p 1_{\{|X| \leq 1\}} + |X|^p 1_{\{|X| > 1\}}$$

$$\leq 1 + |X|^q \rightarrow \in \text{ INTEGRABLE}$$

$$\Rightarrow |X|^p \in \text{INTEGRABLE}$$



Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica

- ▶ se $X = 0$ q.c., allora $X \in L^1$ e $E[X] = 0$

- ▶ se $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0$, allora $X1_A \in L^1$ e $E[X1_A] = 0$

- ▶ se $X \geq 0$ q.c. allora $E[X] \geq 0$
inoltre,

$$E[X] = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ q.c.}$$

oppure

$$E[X] > 0 \Leftrightarrow P(X > 0) > 0$$

$$X=0 \text{ Q.C.}$$

$$P(X=0)=1 \quad X \in L^1, \quad E(X)=0$$

$$X \text{ SIMPLICE} \quad X = \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & & p_n \end{matrix}$$

$$\text{SE } x_i \neq 0 \Rightarrow p_i = 0$$

$$E(X) = \sum x_i p_i = 0$$

$$X \geq 0 \quad \text{S.T.} \quad 0 \leq Y \leq X, \quad Y \text{ SIMPLICE}$$

$$\{X=0\} \subset \{Y=0\} \quad \Rightarrow \quad Y=0 \text{ Q.C.}, \quad E(Y)=0$$

$$\Rightarrow E(X)=0$$

X QUALUNQUE

$$X = X^+ - X^-$$

$$\{X=0\} = \{X^+=0, X^-=0\}$$

$$\Rightarrow X^+, X^- = 0 \quad \text{a.c.} \quad \Rightarrow E(X^+) = E(X^-) = 0$$

$$X1_A, \text{ con } \mathcal{P}(A)=0$$

$$\Rightarrow X1_A = 0 \text{ Q.C.}$$

$$\{X1_A \neq 0\} \subset A, \text{ cioè } X1_A = 0 \text{ Q.C.}$$

$$X \geq 0$$

$$E(X) = 0$$

$$X = \underbrace{X 1_{\{X=0\}}}_{=0} + X 1_{\{X>0\}}$$

$$E(X 1_{\{X>0\}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0 \quad \text{a.s.}$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica

► [Integrazione rispetto alla misura immagine (I)]:

$$\underline{X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)} \Leftrightarrow \underline{f(x) = x \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)}$$

e in questo caso

$$\underline{E[X]} = \underline{\int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)} = \underline{\int_{\mathbb{R}} x dP_X(x)}$$

notazione alternativa (F_X è la cdf di X):

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x)$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica

► [Integrazione rispetto alla misura immagine (II)]: X va, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile

$$\underline{g(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \Leftrightarrow g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)}$$

e in questo caso

$$\int_{\mathbb{R}} x dP^{(X)}_{g(X)}$$

$$= \boxed{E[g(X)] = \int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X(x)}$$

notazione alternativa (F_X è la cdf di X):

$$\boxed{E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_X(x)}$$

- Basta usare la legge di X , non serve quella di $g(X)$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica

- ▶ [Caso discreto] X va discreta con valori $x_1, \dots, x_n, \dots$ e masse $p_1, \dots, p_n, \dots$

$$X \in L^1 \Leftrightarrow \sum_{i \geq 1} |x_i| p_i < +\infty$$

e in questo caso

$$E[X] = \sum_{i \geq 1} x_i p_i$$

se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile con $g(X) \in L^1$,

$$E[g(X)] = \sum_{i \geq 1} g(x_i) p_i$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica

► [Caso continuo] X va continua con pdf f_X

$$X \in L^1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx < +\infty$$

e in questo caso

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

$x \cdot f(x) dx$
—
 x
VALORE PROB

se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile con $g(X) \in L^1$,

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Speranza Matematica

- Proprietà della speranza matematica

- [Caso misto (I)] Se Y è mistura di $X_1, X_2 \in L^1$,

$$F_Y = \lambda F_{X_1} + (1 - \lambda) F_{X_2}$$

allora $Y \in L^1$ e

$$E[Y] = \lambda E[X_1] + (1 - \lambda) E[X_2]$$

- [Caso misto (II)] se X ha parte discreta con valori $x_1, \dots, x_n, \dots$ e masse $p_1, \dots, p_n, \dots$ e parte continua con “densità” $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, allora

$$E[X] = \sum_{i \geq 1} x_i p_i + \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

ESEMPIO P. 123

X DANNO DA INCENDIO

2 MASSE: 0, 100 CON PROB. 0.5, 0.05

DANNO TRA 0 E 100 DIFFUSO IN

MANIERA UNIFORME $f(x) = K = 0.0045$

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0.5 + 100 \times 0.05 + \int_0^{100} x \cdot K \, dx \\ &= 5 + K \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{100} = 5 + K \frac{100^2}{2} \end{aligned}$$

$$E|X| < +\infty \quad \begin{matrix} E(X^+) < +\infty \\ E(X^-) < +\infty \end{matrix}$$

$$X, Y \geq 0$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$X \geq 0$$

$$E(X) = +\infty$$

$$E(X-X) = 0$$

$$E(X) - E(X)$$

NON HA SENSO

- Possibili estensioni

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

$$X \geq 0, Y \geq 0, \alpha, \beta \geq 0$$

- tutte le proprietà viste continuano a valere per va nonnegative (anche se non integrabili), con ovvi aggiustamenti
- si può definire la speranza matematica di X in generale anche se non integrabile, se una delle due speranza

$$\underline{E[X^+], E[X^-]}$$

è finita; le proprietà viste continuano a valere, con ovvi aggiustamenti

- anche se $X \in \overline{\mathbb{R}}$ ha senso definire $E[X] \in \overline{\mathbb{R}}$, a meno che non sia $P(X = +\infty) > 0, P(X = -\infty) > 0$; se $E[|X|] < +\infty$ allora X è finita q.c.

Speranza Matematica

- ESERCIZIO.

- ▶ $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$E[X] = \lambda$$

- ▶ $X \sim U(a, b)$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

- ▶ $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$$

- ▶ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E[X] = \mu$$

- ▶ X ha distribuzione di **Cauchy** se la pdf è

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

speranza matematica **non definita**

X - CAUCHY

$$E(X^+) = \int_{\mathbb{R}} x^+ f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\log(1+x^2) \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1+x^2)}_{= +\infty} - 0 \right) = +\infty$$

$$E(X^-) = +\infty$$

Speranza Matematica

- Alcune trasformate di una va X
 - ▶ $E[X^p], E[|X|^p]$ **momenti e momenti assoluti** di ordine $p > 0$ ($X \in L^p$)
 - ▶ $E[(X - E[X])^p]$ **momenti centrali** di ordine $p > 0$ ($X \in L^p$)
- La distribuzione determina i momenti, $p \in \mathbb{N}$ **ma non viceversa** (problema dei momenti); esempio: distribuzione lognormale

Alcune trasformate di una v.a. X

- Funzione generatrice dei momenti

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

- ▶ $M_X : I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo contenente 0
 - ▶ se $M_X(t) = M_Y(t)$ per ogni t in un intorno (non degenere) di 0,
allora $X \sim Y$
 - ▶ se $X \in L^n$ allora $M_X^{(n)}(0) = E[X^n]$
- $I = (a, b) \quad a < 0 < b$
- ESERCIZIO. Calcolare la funzione generatrice dei momenti di una Poisson
 - ESERCIZIO. Calcolare la funzione generatrice dei momenti di una normale

$$X \sim \text{POISSON}(\lambda)$$

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{t \cdot k}}{(e^t)^k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$M_X(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$Y = e^X \quad Y \text{ LOGNORMALE}$$

$$E(Y^p) = E(e^{pX}) = M_X(p) = e^{p\mu + \frac{p^2\sigma^2}{2}}$$

$$\text{MA} \quad M_Y(t) = +\infty \quad \text{SE} \quad t > 0$$

Alcune trasformate di una v.a. X

$$|\cos(tX)| \leq 1$$

- Funzione caratteristica

$$\cos(tX) + i \sin(tX)$$

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$$

► $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

► se $\varphi_X = \varphi_Y$ allora $X \sim Y$

► se $X \in L^n$ allora $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n E[X^n]$

Speranza Matematica

- Alcune disuguaglianze

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

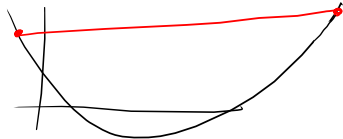
$E(\sqrt{X}) \leq \sqrt{E(X)}$ ▶ [Disuguaglianza di Jensen]
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, misurabile
 X va, con $f(X) \in L^1$
allora $X \in L^1$ e riesce

$$E(X^2) \geq E(X)^2$$
$$E(e^X) \geq e^{E(X)}$$

- ESEMPIO.

$$f(E[X]) \leq E[f(X)]$$

$\geq$ se f CONCAVA



▶ $|E[X]| \leq E[|X|]$ se $X \in L^1$

▶ $E[X]^2 \leq E[X^2]$ se $X \in L^2$

Speranza Matematica

- **Varianza**: se $X \in L^2$ si definisce

$$\sigma_X^2 = \text{VAR}[X] = E[(X - E[X])^2] \geq 0$$

$$\sigma_X = \sqrt{\text{VAR}[X]} = \text{deviazione standard di } X$$

- Proprietà: se $X \in L^2$

- ▶ $\text{VAR}[X] = E[X^2] - E[X]^2$

- ▶ $\text{VAR}[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \text{VAR}[X]$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- ▶ $\text{VAR}[X] = 0$ se e solo se $X = E[X]$ q.c.

Speranza Matematica

- ESERCIZIO.

- ▶ se $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, $\text{VAR}[X] = p(1 - p)$

- ▶ se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, calcolare

$$E[X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)]$$

e ricavare $\text{VAR}[X]$

- ▶ $X \sim U(a, b)$

$$\text{VAR}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- ▶ $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$

$$\text{VAR}[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

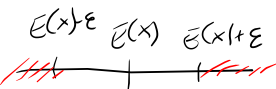
- ▶ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\text{VAR}[X] = \sigma^2$$

Speranza Matematica

- Alcune disuguaglianze

► [Disuguaglianza di Markov] $X \geq 0$ q.c., per ogni $\alpha > 0$



$$P(X > \alpha) \leq \frac{E[X]}{\alpha}$$

► [Disuguaglianza di Bienaymé-Chebyshev] $X \in L^2$, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} X &> E(X) + \varepsilon \\ \text{oppure} \\ X &< E(X) - \varepsilon \end{aligned}$$

$$P(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$$

quindi per ogni $k \geq 1$ ("evento k-sigma") $\varepsilon = k \sigma_X$

$$P(|X - E[X]| > k \sigma_X) \leq \frac{1}{k^2}$$

↪ varianza: misura di dispersione di X

MARKOV $\alpha > 0$ $X \geq 0$

$$X = X 1_{\{X \leq \alpha\}} + X 1_{\{X > \alpha\}}$$

$$\geq 0 + \alpha \cdot 1_{\{X > \alpha\}}$$

$$E(X) \geq \alpha \underbrace{E(1_{\{X > \alpha\}})}_{P(X > \alpha)}$$

$$P(|X - E(X)| > \varepsilon) = P(|X - E(X)|^2 > \varepsilon^2)$$

$$\stackrel{\text{Markov}}{\leq} \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$$

Speranza Matematica

- Convergenza della speranza matematica

- ▶ se $X_n \rightarrow X$ q.c. (convergenza quasi certa), cioè per ogni $\omega \in A$ con $\underline{P(A) = 1}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) \rightarrow X(\omega),$$

quando succede che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[X_n] = E[X] \quad ? \quad \lim E(X_n) = E(\lim X_n)$$

- ▶ [Teorema di convergenza monotona]

$(X_n)_{n \geq 1}$ va con $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$, q.c.
allora posto

$$X = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n \equiv \sup_n X_n \text{ q.c.}$$

riesce

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[X_n] = E[X] \in [0, +\infty]$$

Speranza Matematica

- Convergenza della speranza matematica

- ▶ [Teorema di convergenza dominata (di Lebesgue)]
 $(X_n)_{n \geq 1}$ e X va tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X \text{ q.c.}$$

ed esiste $Y \in L^1$ tale che

$$|X_n| \leq Y \text{ per ogni } n \geq 1, \text{ q.c.}$$

allora $X_n, X \in L^1$ per ogni $n \geq 1$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[X_n] = E[X]$$

Speranza Matematica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \quad S_n = X_1 + \dots + X_n$$

$$0 \leq S_n \leq S_{n+1}$$

- Convergenza di serie di speranze matematiche

► [Serie a termini positivi]

$(X_n)_{n \geq 1}$ va con $X_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$ q.c., allora

$$E \left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} E[X_n]$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} E(X_n)}$$

$$E \left(\sum X_n \right) = E \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

Speranza Matematica

- Convergenza di serie di speranze matematiche

► [Serie convergente assolutamente] $(X_n)_{n \geq 1}$ va con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E[|X_n|] < +\infty$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} |X_n| \in L^1$ e

$$E \left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} E[X_n]$$

- Quindi, se $\sum_{n=1}^{+\infty} E[|X_n|] < +\infty$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ converge assolutamente, q.c.

Speranza Matematica

- ESERCIZIO. Nei seguenti due casi dire se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$$

converge q.c. e calcolare il suo valore atteso

▶ $X_n \sim \text{Gamma}(1, 2^{n-1}), n \geq 1$

▶ per $n \geq 1$

$$X_n \sim \begin{cases} -\frac{1}{n!} & \text{con prob. } 1-p \\ +\frac{1}{n!} & \text{con prob. } p \end{cases}$$

$$X_n \sim \text{GAMMA}(1, 2^{n-1}) \geq 0$$

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{E(X_n)}_{\frac{1}{2^{n-1}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \quad \alpha \neq 1$$

$$E\left(\sum X_n\right) = 2 \Rightarrow \sum_{\text{Q.C.}} X_n < +\infty \Rightarrow \sum X_n \text{ CONVERGE } \text{Q.C.}$$

$$X_n = \begin{cases} -1/n! & 1-p \\ 1/n! & p \end{cases}$$

$$\sum X_n < +\infty ?$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E(|X_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1 < +\infty$$

$$|X_n| = \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow \sum X_n < +\infty$$

(E in L^1)

$$E\left(\sum X_n\right) = \sum E(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (2p-1) = (2p-1)(e-1)$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- $\mathbf{X}$ va con legge $P_{\mathbf{X}}$

- ▶ [Integrazione rispetto alla misura immagine] se $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile e tale che $g(\mathbf{X}) \in L^1$ o $g \geq 0$

$$\underline{E[g(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) dP_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} \quad \text{--- } (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_{\mathbf{X}})$$

- ▶ [Caso discreto]

$$\underline{E[g(\mathbf{X})] = \sum_{j_1, \dots, j_n} g(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_n}^{(n)}) p_{j_1, \dots, j_n}}$$

- ▶ [Caso continuo con densità]

$$\underline{E[g(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$ vettore di va;
le seguenti proprietà sono equivalenti

- 1 $X_1, \dots, X_n$ sono **indipendenti** $F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n)$
- 2 per ogni $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili tali che tutte le variabili sono integrabili,

$$E[g_1(X_1) \cdots g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)] \cdots E[g_n(X_n)]$$

- 3 **[Funzione caratteristica]** per ogni $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$

$$E[e^{i(t_1 X_1 + \dots + t_n X_n)}] = \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E[e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{X}}] = \varphi_{X_1}(t_1) \cdots \varphi_{X_n}(t_n)$$

- 4 **[Funzione generatrice dei momenti]** per ogni $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che le speranze esistono

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E[e^{\mathbf{t}^T \mathbf{X}}] = M_{X_1}(t_1) \cdots M_{X_n}(t_n)$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- ESERCIZIO. $X_1, \dots, X_n$ va indipendenti, $X = X_1 + \dots + X_n$
 - ▶ se $X_i \sim \text{Binomiale}(n_i, p)$ allora $X \sim \text{Binomiale}(\sum_i n_i, p)$
 - ▶ se $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ allora $X \sim \text{Poisson}(\sum_i \lambda_i)$
 X_i n. di sinistri nel i -esimo portafoglio, X n. totale di sinistri

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

$$E[e^{tX}] = M_X(t)$$

1)

$$E[e^{t(X_1 + \dots + X_n)}] = E[e^{tX_1}] \dots E[e^{tX_n}]$$

$$= M_{X_1}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

$$= e^{\lambda_1(e^t - 1)} \dots e^{\lambda_n(e^t - 1)}$$

$$= e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)(e^t - 1)} \quad \text{MGF di Poisson } (\sum \lambda_i)$$

$$\Rightarrow X \sim \text{Poisson}(\sum \lambda_i)$$

Variabili Aleatorie Multivariate

$$\underline{x} \rightarrow E[g(\underline{x}, \underline{Y})] = h(\underline{x}) \quad \text{misurabile}$$

o viceversa $h(\underline{x}) \in L^1$

- Calcolo di speranze iterate - Teorema di Fubini

- $\underline{X}, \underline{Y}$ va in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, indipendenti,
 $g: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile con $g(\underline{X}, \underline{Y}) \in L^1$ oppure $g \geq 0$
allora

$$E[g(\underline{X}, \underline{Y})] = E[E[g(\underline{x}, \underline{Y}) | \underline{x} = \underline{x}]]$$

in particolare, per ogni $B \in \mathcal{B}^2$

$$P(g(\underline{X}, \underline{Y}) \in B) = E[P(g(\underline{x}, \underline{Y}) \in B) | \underline{x} = \underline{x}]$$

$$F_{g(\underline{X}, \underline{Y})}(z) = P(g(\underline{X}, \underline{Y}) \leq z)$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- ESERCIZIO. Calcolare la legge di $X + Y$ se X, Y sono indipendenti e $X, Y \sim \text{Exp}(1)$
- ESERCIZIO. Calcolare la legge di U/V se U, V sono indipendenti e $U, V \sim U(0, 1)$

$U, V \sim U(0,1)$
INDEPENDENT

$$X = \frac{U}{V} > 0 \quad \text{a.s.}$$

$$F_X(x) = P\left(\frac{U}{V} \leq x\right) = E\left[P\left(\frac{U}{V} \leq x\right) \mid V=V\right] \stackrel{x>0}{=} \neq$$

$$P(U \leq xV) = F_U(xV) = 1_{\{xV > 1\}} + xV 1_{\{xV \leq 1\}}$$

$$\neq E[1_{\{xV > 1\}} + xV 1_{\{xV \leq 1\}}]$$

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{P(V > \frac{1}{x})}_{\begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}} + x \underbrace{E[V \mathbf{1}_{\{V \leq \frac{1}{x}\}}]}_{\begin{cases} \int_0^1 v \mathbf{1}_{\{v \leq \frac{1}{x}\}} \cdot \mathbf{1}'' dv & \\ \int_0^1 v dv = \frac{1}{2} & x \leq 1 \\ \int_0^{1/x} v dv = \frac{1}{2x^2} & x > 1 \end{cases}}
 \end{aligned}$$

$f_V(v) \quad v \in (0,1)$

$$= \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases} + x \cdot \begin{cases} \frac{1}{2} & x \leq 1 \\ \frac{1}{2x^2} & x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x}{2} & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = 1 - \frac{1}{2x} & x > 1 \end{cases}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- **Covarianza**: se $X, Y \in L^2$, si definisce

$$\text{COV}[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

↪ misura di **dipendenza** di X e Y

- Proprietà: se $X, Y, Z \in L^2$
 - ▶ $\text{COV}[X, X] = \text{VAR}[X]$; $\text{COV}[X, Y] = 0$ se Y degenera
 - ▶ $\text{COV}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$
 - ▶ [**Simmetria**] $\text{COV}[X, Y] = \text{COV}[Y, X]$
 - ▶ [**Bilinearità**] per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{COV}[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha \text{COV}[X, Z] + \beta \text{COV}[Y, Z]$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà: se $X, Y \in L^2$

▶ [Indipendenza] $\text{COV}[X, Y] = 0$ se X, Y indipendenti (non viceversa!)

▶ [Varianza della somma]

$$\text{VAR}[X + Y] = \text{VAR}[X] + \text{VAR}[Y] + 2\text{COV}[X, Y]$$

e quindi

$$\text{VAR}[X + Y] = \text{VAR}[X] + \text{VAR}[Y]$$

se X, Y indipendenti

▶ [Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz]

$$|\text{COV}[X, Y]| \leq \sqrt{\text{VAR}[X]\text{VAR}[Y]}$$

$$|\text{COV}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{VAR}(X)} \sqrt{\text{VAR}(Y)}$$

$$Z = Y + \alpha X \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{VAR}(Z) \geq 0$$

$$\text{VAR}(Y + \alpha X) = \text{VAR}(Y) + \text{VAR}(X) \alpha^2 + 2 \alpha \text{COV}(X, Y)$$

SE $\text{VAR}(X) = 0$ OI SUJEVAGLIAVA VERBA $0 = 0$

$$\text{VAR}(X) \geq 0$$

$$\Delta = 4 \operatorname{COV}(X, Y)^2 - 4 \operatorname{VAR}(X) \operatorname{VAR}(Y) \leq 0$$

$$\operatorname{COV}^2 \leq \operatorname{VAR}(X) \operatorname{VAR}(Y)$$

$$|\operatorname{COV}(X, Y)| \leq \sqrt{\operatorname{VAR}(X)} \sqrt{\operatorname{VAR}(Y)}$$

QUANDO VALE L'UGUAGLIANZA?

SE E SOLO SE $\exists \alpha^* \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$Y + \alpha^* X$ OGGENERE

$Y + \alpha^* X = K$ Q.C.

$$Y = K - \alpha^* X \text{ Q.C.}$$

X SIMMETRICA

$$X \sim -X$$

$$Y = X^2 = g(X)$$

$$E(X) = E(-X) = -E(X) \Rightarrow E(X) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{COV}(X, Y) &= E(X \cdot Y) = E(X^3) \\ &= E((-X)^3) = -E(X^3) = 0 \end{aligned}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- **Coefficiente di correlazione (di Pearson)**: se $X, Y \in L^2$, $\sigma_X^2 \sigma_Y^2 > 0$, si definisce

$$\rho_{X,Y} = \text{CORR}[X, Y] = \frac{\text{COV}[X, Y]}{\sqrt{\text{VAR}[X]\text{VAR}[Y]}}$$

- Proprietà: se $X, Y \in L^2$, $\sigma_X^2 \sigma_Y^2 > 0$
 - ▶ **[Simmetria]** $\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$
 - ▶ **[Invarianza di scala e locazione]** per ogni $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$,
 $\rho_{\alpha X + \beta, Y} = \rho_{X,Y}$
 - ▶ **[Normalizzazione]** $|\rho_{X,Y}| \leq 1$
e $|\rho_{X,Y}| = 1 \iff Y = \alpha X + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
($\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\rho_{X,Y})$)

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà: se $X, Y \in L^2$, $\sigma_X^2 \sigma_Y^2 > 0$
 - ▶ [Indipendenza] $\rho_{X,Y} = 0$ se X, Y indipendenti
 - ▶ [Regressione lineare di Y su X] il problema

$$\min_{a,b} E[(Y - (aX + b))^2]$$

ha soluzione $\hat{a}, \hat{b}$ tale che

$$\hat{a} = \rho_{X,Y} \sqrt{\frac{\text{VAR}[X]}{\text{VAR}[Y]}}$$

MIGLIORE
APPROSSIMAZIONE
LINEARE DI Y
USANDO

inoltre

$$R^2 = 1 - \frac{E[(Y - (\hat{a}X + \hat{b}))^2]}{\text{VAR}[Y]} = \rho_{X,Y}^2$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$ vettore di va con $X_i \in L^2$ per ogni i ; la matrice varianze-covarianze è

$$\text{COV}[\mathbf{X}]_{i,j} = \text{COV}[X_i, X_j], \quad 1 \leq i, j \leq n$$

VAR(X)

$$\begin{pmatrix} \text{COV}(X_1, X_1) & \text{COV}(X_1, X_2) \\ \text{COV}(X_2, X_1) & \dots \\ \vdots & \\ \text{COV}(X_n, X_1) & \dots \end{pmatrix}$$

- Proprietà di $\text{COV}[\mathbf{X}]$

► [Simmetria] $\text{COV}[\mathbf{X}]$ è **simmetrica**

► [Linearità] per ogni A matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$

$$Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + b_i$$

vettore di va in $\mathbb{R}^m$ con

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$E[\mathbf{Y}] = A E[\mathbf{X}] + b,$$

$$\text{COV}[\mathbf{Y}] = A \text{COV}[\mathbf{X}] A^T$$

$$\text{COV}(\underline{Y_i}, \underline{Y_h}) =$$

$$= \text{COV}\left(\sum_{j=1}^n \underline{a_{ij}} X_j + \cancel{b_i}, \sum_{k=1}^n \underline{a_{hk}} X_k + \cancel{b_h}\right)$$

$$= \sum_j \sum_k a_{ij} a_{hk} \text{COV}(X_j, X_k)$$

ELEMENTO (i, h) DELLA MATRICE

$$A \text{COV}(\underline{X}) A^T$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- ESERCIZIO. Scrivere una formula per la varianza di

$$a_1X_1 + \dots + a_nX_n$$

- ESEMPIO. $P_1(t), \dots, P_n(t)$ sono i prezzi di n titoli, $t = 0, 1$
 - ▶ $R_i = \frac{P_i(1) - P_i(0)}{P_i(0)}$ rendimento semplice del titolo $i = 1, \dots, n$
 - ▶ a_i quantità detenuta del titolo $i = 1, \dots, n$
 - ▶ dati $E[R_i] = \mu_i$, $\text{VAR}[R_i] = \sigma_i^2$ e $\text{CORR}[R_i, R_j] = \rho_{ij}$, scrivere formule per il valore atteso e varianza del rendimento di portafoglio

$R = ?$ RENDIMENTO DO PORTAFOLIO

$$R = \frac{V(1) - V(0)}{V(0)}$$

$V(t)$ = VALORE DO PORTAFOLIO
em t

$$= \sum_{i=1}^n a_i P_i(t)$$

$$= \frac{\sum a_i P_i(1) - \sum a_i P_i(0)}{V(0)} = \frac{\sum a_i (P_i(1) - P_i(0))}{V(0)} =$$

$$= \sum_i \alpha_i \left(\frac{P_i(1) - P_i(0)}{P_i(0)} \right) \frac{P_i(0)}{V(0)}$$

$$= \sum_i \left(\frac{\alpha_i P_i(0)}{V(0)} \right) \cdot R_i = \sum_i \alpha_i R_i$$

$\alpha_i = \%$ 01 RICCHEZZA $V(0)$ INVESTITA
NEL TADCO i -ESIMO

$$\sum \alpha_i = 1$$

$$R = \sum \alpha_i R_i$$

$$E(R) = \sum \alpha_i \mu_i$$

$$\text{VAR}(R) = \underline{\alpha}^T \text{COV}(\underline{R}) \underline{\alpha}$$

$$= \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \text{COV}(R_i, R_j)$$

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \text{VAR}(R)$$

CON 1 VINCOLO

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$$

$$E(R) = \bar{\mu} \text{ (RENDIMENTO TARGET)}$$

$$\text{VAR}(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) \\ = \text{VAR}\left(\underbrace{[a_1 \dots a_n]}_{\underline{a}^T} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \underline{a}^T \text{COV}(\underline{X}) \underline{a} = \sum_i \sum_j a_i a_j \text{COV}(X_i, X_j) \\ = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{VAR}(X_i) + 2 \sum_{\substack{i=1 \dots n \\ i < j}} \text{COV}(X_i, X_j)$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà di $\text{COV}[\mathbf{X}]$

- ▶ $\text{COV}[\mathbf{X}]_{ii} = \text{VAR}[X_i]$

- ▶ $\text{COV}[\mathbf{X}]$ è **semi definita positiva**: per ogni $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{z}^T \text{COV}[\mathbf{X}] \mathbf{z} \geq 0$$

- ▶ se $\text{COV}[\mathbf{X}]$ **non è di rango pieno**, esiste una combinazione lineare di $X_1, \dots, X_n$ degenere (**relazione lineare** tra le variabili)

- Proprietà simili valgono per la **matrice di correlazione**

$$\text{CORR}[\mathbf{X}]_{i,j} = \rho_{X_i, X_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$\underline{z}^T \text{COV}(\underline{X}) \underline{z} = \text{VAR}(z_1 X_1 + \dots + z_n X_n) \geq 0$$

$$\text{COV}(\underline{X}) \text{ RANGO} < n$$

$$\text{ESISTE } \underline{z} \neq \underline{0} \text{ tale che}$$

$$\text{COV}(\underline{X}) \underline{z} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{z}^T \text{COV}(\underline{X}) \underline{z} = 0 = \text{VAR}(z_1 X_1 + \dots + z_n X_n)$$

$$\Rightarrow z_1 X_1 + \dots + z_n X_n = k \quad \text{Q.c.}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- **Normale multivariata:** $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]$

- ▶ posto $\mu = E[\mathbf{X}]$ e $\Sigma = \text{COV}[\mathbf{X}]$, se Σ è di rango pieno allora la pdf di $\mathbf{X}$ è

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right\}$$

- ▶ se ogni marginale è $N(0, 1)$ allora $\mathbf{X}$ è **multivariata standard**

Speranza Matematica

- ESERCIZIO. Calcolare il coefficiente di correlazione per

① due indicatori di eventi

② il minimo U e il massimo V di due dadi

③ l'esponenziale bivariata a p. 133

④ due lognormali $Y_1 = e^{X_1}$ e $Y_2 = e^{X_2}$ con X_1, X_2 normale bivariata standard

$\text{corr}(Y_1, Y_2) = \rho$ / non può essere -1
 $\text{corr}(X_1, X_2) = \rho$