

Speranza Matematica Condizionata

Speranza Matematica Condizionata

- Obiettivo:

- ▶ estendere il concetto di probabilità condizionata $P(A|B)$
- ▶ prima a quello di speranza condizionata a un evento $E[X|B]$
- ▶ poi a quello di speranza condizionata a una σ -algebra

$$\underline{E[X|\mathcal{G}]}$$

$\mathcal{G}$ = informazione

$$\sigma(Y_1, \dots, Y_n)$$

- ▶ in particolare, speranza condizionata a una o più variabili aleatorie

$$\underline{E[X|Y_1, \dots, Y_n]}$$

- ▶ collegamento con la legge condizionata

Speranza Condizionata a un Evento

$$X = 1_A$$

$$E[1_A | B] = \frac{E[1_A \cdot 1_B]}{P(B)} = \frac{E[1_{A \cap B}]}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $B \in \mathcal{F}$ con $P(B) > 0$, X va tale che $X \in L^1$ o $X \geq 0$ si definisce

$$E[X|B] = \frac{E[X; B]}{P(B)}$$

dove per convenzione $E[X; B] = \int_B X dP = E[X 1_B]$

$$(X 1_B)(\omega) = X(\omega) 1_B(\omega)$$

$$= \begin{cases} X(\omega) & \omega \in B \\ 0 & \omega \notin B \end{cases}$$

► se $A \in \mathcal{F}$, $P(A|B) = E[1_A|B]$

► $E[X|B] = E_{P_B}[X]$ dove E_{P_B} = speranza sotto la probabilità P_B (p. 52)

↪ $E[\cdot|B]$ ha tutte le proprietà di una speranza (non condizionata)

$$P_B(A) = P(A|B)$$

$$E_{P_B}[X] = E[X|B]$$

$$(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$$

X v.a. SEMPLICE

$$X = \sum c_i 1_{A_i} \quad \begin{matrix} c_i \in \mathbb{R} \\ A_i \in \mathcal{F} \end{matrix}$$

$$E[X|B] = \frac{E[X; B]}{P(B)} = \frac{E\left(\left(\sum c_i 1_{A_i}\right) 1_B\right)}{P(B)} =$$

$$= \frac{\sum c_i E[1_{A_i \cap B}]}{P(B)} = \sum c_i \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$= \sum c_i P(A_i | B) = \sum c_i P_B(A_i) = E_{P_B}[X]$$

Speranza Condizionata a un Evento

$\sigma(X), \sigma(\{B_i\})$ INDIPENDENTI

- Proprietà della speranza condizionata (a un evento)

► [Indipendenza] se X indipendente da B , $E[X|B] = E[X]$

$$E[X|B] = E[X] \cdot E[1_B]$$

► [Disintegrabilità (I)] $(B_i)_i \subset \mathcal{F}$ partizione discreta di Ω

$$E[X] = \sum_{i: P(B_i) > 0} P(B_i) E[X|B_i]$$

► [Disintegrabilità (II)] Y va discreta con determinazioni $y_1, \dots, y_n, \dots$

$$E[X] = \sum_{i: P(Y=y_i) > 0} P(Y=y_i) E[X|Y=y_i]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{B_i}$

- L'ultima proprietà non può essere utilizzata con Y va continua!

Speranza Condizionata a un Evento

- ESERCIZIO. Lancio di due dadi, X_1, X_2 risultato del primo e secondo dado, $Z = X_1 + X_2$, $U = \min\{X_1, X_2\}$, $V = \max\{X_1, X_2\}$; calcolare

$$E[X_1|Z = i], \quad i = 2, \dots, 12$$

$$E[U|V = i], \quad i = 1, \dots, 6$$

- ESERCIZIO. Una portafoglio di rischi è classificato in *buoni* (20%), *normali* (45%), *mediocri* (35%); il danno atteso per sinistri buoni, normali e mediocri è rispettivamente 500€, 750€ e 1500€. Calcolare il danno atteso per un rischio estratto a caso dal portafoglio.

$$E[X_1 | Z = i] + E[X_2 | Z = i] =$$

$$= E[Z | Z = i] = i$$

$$\Rightarrow E[X_1 | Z = i] = \frac{i}{2}$$

$$E[U | V = i]$$

$$E[U | V = 1] = 1$$

$$E[U | V = i] = \frac{E[U \cdot 1_{\{V=i\}}]}{P(V=i)}$$

$$P(V=i) = \frac{2i-1}{36}$$

$$E[U \cdot 1_{\{V=i\}}] = \sum_{j=1}^i j \cdot P(U=j, V=i) =$$

$$= \sum_{j=1}^i j \cdot \underbrace{P(U=j, V=i)}_{\begin{cases} \frac{2}{36} & j < i \\ \frac{1}{36} & j = i \end{cases}} = \frac{2}{36} \sum_{j=1}^{i-1} j + \frac{1}{36} i$$

$$\underline{i=2} \quad E[U|V=2] = \frac{\frac{2}{36} \cdot 1 + \frac{1}{36} \cdot 2}{\frac{3}{36}} = \frac{4}{3}$$

$$\underline{\bar{\lambda} = 6} \quad E[U|U=6] = \frac{\frac{2}{36}(1+2+3+4+5) + \frac{1}{36}6}{\frac{11}{36}}$$

$$= \frac{\frac{2 \cdot 15 + 6}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{36}{11} < \underline{3.5}$$

$X = \text{Danno Atteso}$

$$E[X] = \underbrace{E[X|B]}_{500} \underbrace{P(B)}_{0.2} + \underbrace{E[X|N]}_{750} \underbrace{P(N)}_{0.45} + \underbrace{E[X|M]}_{1500} \underbrace{P(M)}_{0.35}$$

DISINTÉGRABILITÀ

$$E[X] = E\left[\sum_i X 1_{B_i}\right] \stackrel{?}{=} \sum_i E[X 1_{B_i}] =$$

$$X = X \cdot 1 = X 1_{\Omega} = X \underbrace{1_{\cup B_i}}_{\sum_i 1_{B_i}} = \sum_i X 1_{B_i}$$

$$\begin{aligned} E[X 1_{B_i}] &= 0 \quad \text{se } P(B_i) = 0 \quad (\text{VISTO IN PRECEDENZA}) \\ &= \sum_{i: P(B_i) > 0} \frac{E(X 1_{B_i})}{P(B_i)} P(B_i) = \sum_{i: P(B_i) > 0} E(X | B_i) P(B_i) \end{aligned}$$

$$E\left(\sum X 1_{B_i}\right) = \sum E(X 1_{B_i})$$

SEMPRE VERA SE $X \geq 0$ a.c.

OPPURE SE $X \in L^1$

SI VERIFICA $\sum E[|X| 1_{B_i}] < +\infty$

Speranza Condizionata a un Evento

$X = \text{N. DI LANCI PER VEDERE } n \text{ TESTE CONSECUTIVE}$
 $E[X] = \alpha$ $X \geq n$

$$\alpha = E[X] = \sum_{i=1}^n \underbrace{E[X | Y=i]}_{=n} P(Y=i) + \underbrace{E[X | Y > n]}_{=n} P(Y > n)$$

- ESERCIZIO. Lanci di una moneta. Trovare una formula per il numero atteso di lanci prima di vedere n teste consecutive. (condizionare a $\{Y=1\}, \dots, \{Y=n\}, \{Y>n\}$ dove Y è il numero di lanci per avere la prima croce)

$$P(Y=i) = q p^{i-1} = \frac{1}{2^i}$$

$$P(Y > n) = p^n = \frac{1}{2^n}$$

$$E[X|Y=i] = i + E[X] = i + \mu$$

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{T} & \overline{T} & \overline{T} & & \overline{T} & \overline{C} & \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \cdots & \overline{i-1} & \overline{i} & | \overline{i+1} \cdots \end{array}$$

$Y=i$

IL CALCOLO PER AVERE
n TESTE RIPARTE
COME SE FOSSIMO AL LANCIO 1

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} (i + \alpha) + \frac{1}{2^n} \cdot \eta$$

EQUAZIONE in α CHE SI PUÒ RISOLVERE

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} + \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}}_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}} + \frac{\eta}{2^n}$$

Speranza Matematica Condizionata

- [Speranza condizionata - Teorema di Kolmogorov] $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $X \in L^1$, $\mathcal{G}$ -sigma algebra con $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$; (esiste) una va Z su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tale che

① Z è $\mathcal{G}$ -misurabile $Z^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in B\} \in \mathcal{G}$ PER DONI
 ② $Z \in L^1$ $B \in \mathcal{B}$

- ③ per ogni $A \in \mathcal{G}$

$E[Z; A] = E[X; A]$ $E[Z 1_A] = E[X 1_A]$

SEMPRE
VERA ($0=0$)
SE $P(A)=0$

inoltre Z è unica: se Z' è una va che soddisfa (1), (2), (3), allora $Z = Z'$ q.c.

Z' È UNA "VERSIONE" DI $E(X|\mathcal{G})$

- $Z = E[X|\mathcal{G}]$ è la speranza condizionata di X all'informazione in $\mathcal{G}$

Speranza Matematica Condizionata

- Osservazioni

- ▶ [Caso nonnegativo] il teorema vale per $X \geq 0$ q.c. con (2) sostituita da $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$ q.c.

- ▶ [Medie parziali (I)] la proprietà (3) può essere scritta come

$$E[\overbrace{E[X|\mathcal{G}]}^Z|A] = E[X|A] \quad \text{per ogni } A \in \mathcal{G} \text{ con } P(A) > 0$$

- ▶ [Medie parziali (II)] (3) può essere sostituita da

$$E[E[X|\mathcal{G}]Y] = E[XY]$$

per ogni Y $\mathcal{G}$ -misurabile tale che le speranze esistono

- ▶ [Probabilità condizionata a una σ -algebra] per $A \in \mathcal{F}$ si pone

$$P(A|\mathcal{G}) = E[1_A|\mathcal{G}]$$

$$E[Z 1_A] = E[X 1_A]$$
$$\rightarrow E[Z \cdot Y] = E[X \cdot Y]$$

Speranza Matematica Condizionata

- Osservazioni $\sigma(\{Y_i\}_{i=1}^n) = \{Y_i \in B\} \mid \bar{\lambda} = 1 - n \mid B \in \mathcal{B}\}$

- ▶ se $\mathcal{G} = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ allora la notazione è

$$\boxed{E[X|\mathcal{G}] = E[X|Y_1, \dots, Y_n]}$$

U.A. MISURABILE
RISPETTO $\sigma(Y_1, \dots, Y_n)$

speranza condizionata di X all'osservazione di $Y_1, \dots, Y_n$

- ▶ esiste una funzione $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile tale che (p. 90)

$$\boxed{E[X|Y_1, \dots, Y_n] = h(Y_1, \dots, Y_n)}$$

e si usa la notazione

prima si è la ope di
secondo
CONTINUA

$$h(y_1, \dots, y_n) = E[X|Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n]$$

curva di regressione di X su $Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata: $X, Y \in L^1$, $\mathcal{G}$ σ -algebra con $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

▶ [Informazione triviale] $E[X|\{\emptyset, \Omega\}] = E[X]$

▶ [media della media condizionata=media]

$\sim (3) \quad A = \Omega$

$$E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X] \text{ q.c.}$$

▶ [Linearità] per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$E[\alpha X + \beta Y|\mathcal{G}] = \alpha E[X|\mathcal{G}] + \beta E[Y|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

▶ [Monotonia] se $X \leq Y$ q.c. allora

$$E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

LINEARITÀ

$$E(\alpha X + \beta Y | y) = \alpha E(X | y) + \beta E(Y | y) \quad \text{Q.C.}$$

BASTA FAR VEDERE CHE IL TERMINE A OX
SODDISFA LE PROPRIETÀ (1), (2), (3) DEL
THM. DI KOŁMOGOROV

(1) OVVIAMENTE

(2) //

$$(3) \quad E[Z | A] = E[(\alpha X + \beta Y) 1_A] \quad \text{PER OGNI } A \in \mathcal{G}$$

$$\hat{E} \text{ SODDISFAZZA DA } Z = \alpha E(X | y) + \beta E(Y | y)$$

$$E(\{\alpha E(X|g) + \beta E(Y|g)\} \cdot 1_A) =$$

$$= E(\alpha E(X|g) 1_A + \beta E(Y|g) 1_A)$$

$$= \alpha \underbrace{E(E(X|g) 1_A)}_{E(X 1_A)} + \beta \underbrace{E(E(Y|g) 1_A)}_{E(Y 1_A)}$$

PER LE PROPRIETÀ (3) DI $E(X|g)$, $E(Y|g)$

$$= E((\alpha X + \beta Y) 1_A)$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata: $X, Y \in L^1$, $\mathcal{G}$ σ -algebra con $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

- ▶ [Misurabilità=costanza] se $XY \in L^1$ e Y - $\mathcal{G}$ misurabile

$$E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

e in particolare

$$E[Y|\mathcal{G}] = Y \text{ q.c.}$$

- ▶ [proprietà iterativa] se $\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ *MA PIÙ INFORMAZIONI RISPETTO A $\mathcal{G}$*

$$E[E[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

$$E(XY|Y) = \underbrace{Y E(X|Y)}_{*} \quad \text{a.c.} \quad \text{e } Y \text{ } \mathcal{G}\text{-MIS.}$$

* SODDISFA (1), LA (2) SI PUÒ
DIMOSTRARE

$$(3) : \underbrace{E[Y E(X|Y) \cdot Z]}_{?} = E[XY \cdot Z]$$

PER DOW
Z $\mathcal{G}$ -MIS
TALE CHE
LE SPERANZE
ESISTONO

$$E[E(X|Y) \cdot \underbrace{YZ}_{\mathcal{G}\text{-MISURABILE}}] = E[X \cdot YZ]$$

$\mathcal{G}$ -MISURABILE

(3) PER
 $E(X|Y)$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata

- ▶ [Disuguaglianza di Jensen] $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa
 X va, $X \in I$ q.c. con $f(X) \in L^1$
allora $X \in L^1$

$$f(E[X|\mathcal{G}]) \leq E[f(X)|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

- ▶ [Contrazione] se $p \geq 1$ e $X \in L^p$ allora $E[X|\mathcal{G}] \in L^p$ e

$$E[|E[X|\mathcal{G}]|^p] \leq E[|X|^p]$$

- ▶ [Indipendenza] se $X \in L^1$ indipendente da $\mathcal{G}$ allora $\sigma(X), \mathcal{G}$ indep.

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X] \text{ q.c.}$$

INDIPENDENZA

$E(X|Y) = E(X)$ Q.C. SE X INDIP DA Y

$E(X)$ È UNA VERSIONE DI $E(X|Y)$

(1) OK, PERCHÉ $E(X)$ È UNA COSTANTE

(2) OK

(3) $E(E(X) \cdot Z) \stackrel{?}{=} E(XZ)$ PER DUE
Z $\mathcal{G}$ MISURABILI

$$= E(X) E(Z) = E(XZ)$$

$\hookrightarrow X, Z$ INDIPENDENTI

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata

► [Teorema di Fubini] $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ va in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, con $\mathbf{Y}$ $\mathcal{G}$ -misurabile
 $g : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile tale che $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in L^1$

$$E[g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathcal{G}] = \underbrace{E[g(\mathbf{X}, \mathbf{y})|\mathcal{G}]}_{\substack{\text{V.A. CHE DIPENDE} \\ \text{DA } \mathbf{Y}}} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{Y}}$$

se $\mathbf{X}$ è anche indipendente da $\mathcal{G}$

$$E[g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathcal{G}] = E[g(\mathbf{X}, \mathbf{y})]_{\mathbf{y}=\mathbf{Y}}$$

"CONSTANTE"
 QUANDO SI
 CONDIZIONA
 A $\mathcal{G}$

Speranza Matematica Condizionata

- [Geometria in L^p] per $X, Y \in L^p$ ($p \geq 1$) si pone

$$\|X\|_p = E[|X|^p]^{1/p}$$
$$d_p(X, Y) = \|X - Y\|_p$$

lunghezza di X

distanza tra X e Y

(identificando X con Y se $X = Y$ q.c.)

- [Geometria in L^2] per $X, Y \in L^2$ si pone

$$\langle X, Y \rangle = E[XY] \quad \text{prodotto scalare di } X \text{ e } Y$$

e X è ortogonale a Y se $\langle X, Y \rangle = 0$; quando una delle variabili ha media nulla, ortogonalità $\equiv$ non correlazione

$$\cos(X, Y) = \frac{E(XY)}{E(X)E(Y)}$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata: $\mathcal{G}$ σ -algebra con $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$,
 $X \in L^2$

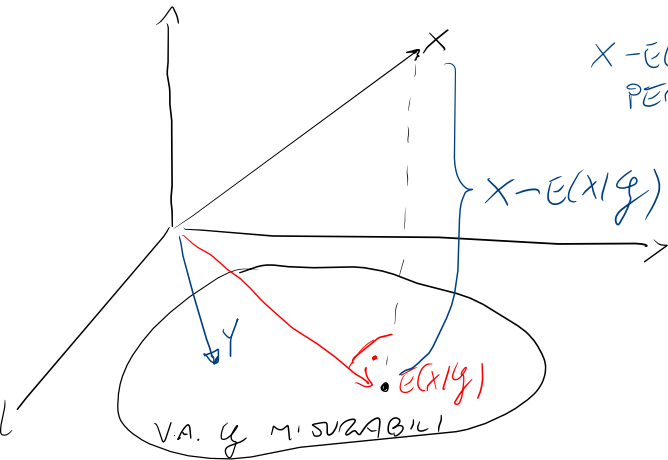
- ▶ [Proiezione ortogonale] $E[X|\mathcal{G}]$ è l'unica variabile aleatoria $\mathcal{G}$ -misurabile in L^2 tale che

$$X - E[X|\mathcal{G}] \text{ è ortogonale a } Y$$

per ogni $Y \in L^2$ $\mathcal{G}$ -misurabile

- ▶ [Miglior predittore] $E[X|\mathcal{G}]$ è l'unica soluzione del problema

$$\min_{\substack{Y \text{ } \mathcal{G}\text{-misurabile, } Y \in L^2}} \underline{d_2(X, Y)}$$



$X - E(X|G) \perp Y$
 PER OGNI Y
 G MISURABILE

$X - E(X|Y) \perp Y$ per Y di MIS.

$$\langle X - E(X|Y), Y \rangle = 0$$

$$E[(X - E(X|Y)) \cdot Y] = 0$$

cioè

$$E[XY] = E[E(X|Y)Y] \quad Y \text{ di MIS.}$$

è la proprietà (3) di $E(X|Y)$

$$\min_{\substack{Y \text{ g-mis} \\ Y \in L^2}} d_2(X, Y) \rightarrow \text{RISOLTO} \\ \text{OA } Y = E(X|g)$$

$$\text{SIA } Y \text{ g mis.}, Y \in L^2$$

$$\begin{aligned} d_2(X, Y)^2 &= \|X - Y\|_2^2 = E[|X - Y|^2] = \\ &= E\left[\underbrace{|X - E(X|g)|^2}_{\text{variance}} + \underbrace{|E(X|g) - Y|^2}_{\text{bias}}\right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= E[(X - E(X|Y))^2] + E[(E(X|Y) - Y)^2] + \\
 &\quad + 2 \underbrace{E[(X - E(X|Y)) \cdot (\overbrace{E(X|Y) - Y}^{\text{Y-MISURABILE}})]}_{=0}
 \end{aligned}$$

$$= d_2(X, E(X|Y))^2 + \underbrace{(\quad)}_{\geq 0} \geq d_2(X, E(X|Y))^2$$

Speranza Matematica Condizionata

3. $\exists \mathcal{G}, B \subset A$
 $\nwarrow$
 $B = \emptyset$ o $B = A$

- Proprietà della speranza condizionata

- [Speranza condizionata a un evento (I)] se $A \neq \emptyset$ è un **atomo** di $\mathcal{G}$ (p. 88) e $P(A) > 0$, allora

$$E[X|\mathcal{G}]1_A = E[X|A]1_A \text{ q.c.}$$

quindi $E[X|\mathcal{G}]$ è costante su A ed uguale a $E[X|A]$

- [Speranza condizionata a un evento (II)] se $Y_1, \dots, Y_n$ sono v.a. e $y_1, \dots, y_n$ con

$$P(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n) > 0$$

allora su $\{Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n\}$

$$E[X|Y_1, \dots, Y_n] = E[X|Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n]$$

MASSA CONCENTRATA IN $(Y_1, \dots, Y_n)$

SPERANZA CONDIZIONATA
 A UN EVENTO

$E[X|\mathcal{G}]$
 COSTANTE
 SU A

$$E[X|Y=y] *$$

(1) Y HA UNA MASSA IN y

$$* = \frac{E[X; Y=y]}{P(Y=y)}$$

(2) PIÙ IN GENERALE

$$E[X|Y=y] = h(y) \quad \text{CON} \quad E[X|Y] = h(Y)$$

ANCHE SE HA $PROB = 0$

$$E(X|G) 1_A = E(X|A) 1_A \quad A \text{ ATOMO DI } \mathcal{G}$$

PROPRIETÀ (3)

CONSTANTE SU A

$$E[X; A] = E[\underbrace{E(X|G)}_{= E(X|G)P(A)}; A]$$

$$\Rightarrow E(X|G) = \frac{E(X; A)}{P(A)} = E(X|A) \quad (\text{SULL' INSIEME } A!)$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata

ogni B_i è un ATOMO PER

- ▶ [Speranza condizionata ad una partizione] $\mathbb{P} = (B_i)_i \subset \mathcal{F}$
partizione discreta di Ω , $\mathcal{G} = \sigma(\mathbb{P})$

$$E[X|\mathcal{G}] = \sum_{i: P(B_i) > 0} 1_{B_i} E[X|B_i] \text{ q.c.}$$

mentre su ogni B_i con $P(B_i) = 0$ si può definire $E[X|\mathcal{G}]$ arbitrariamente

leg

Legge e Speranza Condizionata

$$(X, Y) \quad Y|X$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}$$

- Dato un vettore di va

$$\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^T = [\underbrace{X_1, \dots, X_m}_{=\mathbf{X}'}, \underbrace{X_{m+1}, \dots, X_n}_{=\mathbf{X}''}]^T$$

con pdf congiunta $f_{\mathbf{X}}$ e pdf marginale di $\mathbf{X}''$ $f_{\mathbf{X}''}$;

la **densità condizionata** di $\mathbf{X}'$ a $\mathbf{X}'' = \mathbf{x}''$ è (ponendo

$$\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_m), \mathbf{x}'' = (x_{m+1}, \dots, x_n))$$

$$f_{\mathbf{X}'|\mathbf{X}''}(\mathbf{x}'|\mathbf{x}'') = \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{f_{\mathbf{X}''}(\mathbf{x}'')}$$

se $f_{\mathbf{X}''}(\mathbf{x}'') > 0$, 0 altrimenti

$\mathbf{x}''$ È FISSATO

È UNA FUNZIONE
DI $\mathbf{x}'$

Legge e Speranza Condizionata

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_{X'|X''}(x'|x'') dx' = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{f_X(x', x'')}{f_{X''}(x'')} dx' = \frac{f_{X''}(x'')}{f_{X''}(x'')} = 1$$

- Proprietà della distribuzione condizionata

▶ per ogni $\mathbf{x}'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ con $f_{X''}(\mathbf{x}'') > 0$

$$f_{X'|X''}(\cdot | \mathbf{x}'') \geq 0$$

è una pdf

$$f_X(x', x'') = f_{X'}(x') f_{X''}(x'') \quad \text{▶ } \mathbf{X}', \mathbf{X}'' \text{ indipendenti se e solo se } \underline{f_{X'|X''} = f_{X'}}$$

▶ congiunta di $(\mathbf{X}', \mathbf{X}'') \equiv$ marginale di $\mathbf{X}''$ & condizionata $\mathbf{X}' | \mathbf{X}''$

$$\begin{matrix} & f_{X''} \\ \swarrow & \\ f_{X'|X''} & \end{matrix}$$

Legge e Speranza Condizionata

- Proprietà della distribuzione condizionata

► [Speranza e legge condizionata] per ogni $\mathbf{x}'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ con $f_{\mathbf{x}''}(\mathbf{x}'') > 0$ e ogni $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile tale che $g(\mathbf{X}') \in L^1$

$$E[g(\mathbf{X}') | \mathbf{X}'' = \mathbf{x}'']$$
$$h''(\mathbf{x}'')$$

$$E[g(\mathbf{X}') | \mathbf{X}'' = \mathbf{x}''] = \int_{\mathbb{R}^m} g(\mathbf{x}') f_{\mathbf{X}' | \mathbf{X}''}(\mathbf{x}' | \mathbf{x}'') d\mathbf{x}'$$

$\Rightarrow$ LEGBE (PDF) CONDIZIONATA

- Il caso in cui $\mathbf{X}'$, $\mathbf{X}''$ sono v.a. discrete (o una discreta e una continua) è simile

Speranza Matematica Condizionata

$$\text{VAR}(X | Y = y)$$

- **Varianza e covarianza condizionata**; per $X, Y \in L^2$

- ▶ varianza di X condizionata all'informazione in $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}\text{VAR}[X|\mathcal{G}] &= E[(X - E[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}] \\ &= E[X^2|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{G}]^2 \geq 0 \quad \text{q.c.}\end{aligned}$$

- ▶ covarianza di X e Y condizionata all'informazione in $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}\text{COV}[X, Y|\mathcal{G}] &= E[(X - E[X|\mathcal{G}])(Y - E[Y|\mathcal{G}]|\mathcal{G}] \\ &= E[XY|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{G}]E[Y|\mathcal{G}]\end{aligned}$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della varianza/covarianza condizionata: $X, Y, Z \in L^2$

► [Simmetria]

$$\text{COV}[X, Y|\mathcal{G}] = \text{COV}[Y, X|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

► [Varianza e covarianza]

$$\text{VAR}[X|\mathcal{G}] = \text{COV}[X, X|\mathcal{G}]$$

- [Bilinearità] se A, B, C sono v.a. $\mathcal{G}$ misurabili tali che tutte le speranze sono finite *(A, B, C "costanti" rispetto a $\mathcal{G}$)*

$$\text{VAR}[AX + B|\mathcal{G}] = A^2 \text{VAR}[X|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

$$\text{COV}[AX + BY + C, Z|\mathcal{G}] = A \text{COV}[X, Z|\mathcal{G}] + B \text{COV}[Y, Z|\mathcal{G}] \text{ q.c.}$$

- [Covarianza "between" e "within"] *$\mathcal{G} = \sigma(Y)$*

→ $\text{VAR}[X] = E[\text{VAR}[X|\mathcal{G}]] + \text{VAR}[E[X|\mathcal{G}]] \text{ q.c.}$

→ $\text{COV}[X, Y] = E[\text{COV}[X, Y|\mathcal{G}]] + \text{COV}[E[X|\mathcal{G}], E[Y|\mathcal{G}]] \text{ q.c.}$

$$\begin{aligned}
& E(\text{cov}(X, Y|Z)) + \text{cov}(E(X|Z), E(Y|Z)) = \\
& = E(E(XY|Z) - E(X|Z)E(Y|Z)) + \\
& + E(E(X|Z)E(Y|Z)) - E(E(X|Z)) \cdot E(E(Y|Z)) \\
& = E(XY) - E(E(X|Z)E(Y|Z)) + E(E(X|Z)E(Y|Z)) \\
& - E(X)E(Y) = \text{cov}(X, Y)
\end{aligned}$$

Speranza Matematica Condizionata

$$X|N, V \sim \text{BINOMIALE}(N, V)$$

- ESERCIZIO. Lanciando una moneta la probabilità di testa è $V \sim U(0, 1)$; si lancia la moneta $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ volte, con N indipendente da V ; sia X il numero di teste; calcolare

1 $E[X|N, V] = NV$

2 $E[X|N] = E[E(X|N, V) | N] = E[NV | N] = N E(V)$

3 $E[X|V]$

4 $E[X]$

5 $\text{VAR}[X|N, V] = NV(1-V)$

6 $\text{VAR}[X|N]$

7 $\text{VAR}[X]$

8 $\text{COV}[X, V|N]$

9 $\text{COV}[X, N|V]$

$N/2$
"
 $N E(V)$
"

$$\text{VAR}(X|N) = E(X^2|N) - \underbrace{E(X|N)^2}_{N/2}$$

$$\begin{aligned} E(X^2|N) &= E(\underbrace{E(X^2|N, V)}_{\text{II}} | N) = E(NV + V^2 N(N-1) | N) \\ &= \underbrace{\text{VAR}(X|N, V)}_{NV(1-V)} + \underbrace{E(X|N, V)^2}_{(NV)^2} \\ &= NV - NV^2 + N^2 V^2 \\ &= NV + V^2 N(N-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= N \cancel{E(V|N)} + N(N-1) \cancel{E(V^2|N)} = \frac{N}{2} + N(N-1) \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{N}{2} + N(N-1) \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{VAR}(X|N) &= \frac{N}{2} + N(N-1)\frac{1}{3} - \frac{N^2}{4} \\
 &= \frac{N}{2} + N^2\frac{1}{3} - N\frac{1}{3} - \frac{N^2}{4} \\
 &= \frac{N}{6} + \frac{N^2}{12}
 \end{aligned}$$

$$\text{VAR}(X|g) =$$

$g \subset \mathcal{H}$

Speranza Matematica Condizionata

- ESERCIZIO. Si sceglie a caso un punto U_1 nell'intervallo $(0,1)$; per $n \geq 1$, dato U_n , si sceglie a caso un punto U_{n+1} su $(0, U_n)$. Dimostrare che la successione U_n converge q.c. a 0
- ESERCIZIO. [distribuzione composta] Il numero di sinistri in un portafoglio è $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$; l'ammontare dell' i -esimo sinistro è X_i ; le va

$$X_1, \dots, X_n, \dots$$

sono indipendenti e identicamente distribuite (iid) con media μ e varianza σ^2 , e indipendenti da N ; il danno totale è

$$S = X_1 + \dots + X_N = \sum_{i=0}^{\infty} 1_{\{N=i\}} (X_1 + \dots + X_i)$$

Calcolare $E[S]$, $\text{VAR}[S]$, $\text{COV}[S, N]$; esprimere M_S tramite M_X, M_N .

FUNZIONE GENERATRICE
DEI MOMENTI

$$E[S] = E[E[S|N]] = E[\cancel{\mu} N] = \mu \lambda$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}[S] &= E[\underbrace{\text{VAR}[S|N]}_{\sigma^2 \cdot N}] + \text{VAR}[\underbrace{E(S|N)}_{\cancel{\mu} N}] \\ &= \sigma^2 \lambda + \mu^2 \lambda \end{aligned}$$

Speranza Matematica Condizionata

- ESERCIZIO. [modello Poisson-Gamma] Il numero di sinistri in un portafoglio è $N|\Lambda \sim \text{Poisson}(\Lambda)$, dove $\Lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$; Λ rappresenta l'eterogeneità della popolazione; trovare la distribuzione di N , $E[N]$, $\text{VAR}[N]$

- ESERCIZIO. [rischio di credito e dipendenza] E_i = l' i -esimo credito è insolvente, $i = 1, \dots, n$;
 $E_1, \dots, E_n$ sono iid condizionatamente a Π , con $P(E_i|\Pi) = \Pi$ ^{PROB. DI INSOLVENZA}
 Π ha distribuzione Beta(α, β) con pdf su (0,1)

$\alpha, \beta > 0$

$$f_{\Pi}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

Trovare la distribuzione del numero di insolvenze. $X = 1_{E_1} + \dots + 1_{E_n}$

$$X : 0, 1, 2, \dots, n$$

$$X|\pi \sim \text{BINOMIALE}(n, \pi)$$

$$P(X=k|\pi) = \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k}$$

$$P(X=k) = \int_0^1 P(X=k|\pi=u) f_{\pi}(u) du$$

$$= \int_0^1 \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du =$$

$$= \binom{n}{q} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 v^{q+\alpha-1} (1-v)^{n-q+\beta-1} dv$$

BETA($\alpha+q, \beta+n-q$)

$$= \binom{n}{q} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+q)\Gamma(\beta+n-q)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)} \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha+q)\Gamma(\beta+n-q)} v^{q+\alpha-1} (1-v)^{n-q+\beta-1} dv$$

$$= \binom{n}{q} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{(\alpha+q-1) \dots \alpha \Gamma(\alpha) \cdot (\beta+n-q-1) \dots \beta \Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+n-1) \dots (\alpha+\beta) \Gamma(\alpha+\beta)} =$$

$$\Gamma(x) = (x-1) \Gamma(x-1)$$

$$= \binom{n}{q} \frac{\alpha^{(q)} \beta^{(n-q)}}{(\alpha + \beta)^{(n)}}$$

$$x^{(q)} = x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+q-1)$$