

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II

A.A. 2025/2026 - INGEGNERIA

SIMULAZIONE DEL 18.12.2025

1. Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = (\cos x - \sin y)(\cos x + \sin y)^2$$

nel quadrato $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Trovare l'insieme di convergenza puntuale, l'insieme di convergenza uniforme e la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n e^{n(x^2+x-2)}}.$$

3. Trovare l'area della superficie σ che ha come supporto la regione del piano di equazione $z = y$ delimitata dal paraboloide $z = x^2 + y^2$.

4. Sia ω la forma differenziale definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ da

$$\omega(x, y) = -\frac{y^3}{x^2 + y^6} dx + \frac{3xy^2}{x^2 + y^6} dy.$$

Dire se ω è chiusa e se ω è esatta, giustificando la risposta.

SOLUZIONI

Esercizio 1. La funzione f è continua sul quadrato $Q = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ che essendo chiuso e limitato è un insieme compatto di $\mathbb{R}^2$. Per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo in Q .

Osserviamo che trovare i massimi e i minimi di f in Q equivale a trovare i massimi e i minimi di $g(u, v) = (u - v)(u + v)^2$ nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ e questa sostituzione rende più facili i calcoli. La funzione g è differenziabile, quindi per il teorema di Fermat, se $(u_0, v_0) \in]0, 1[\times]0, 1[$ è un punto di massimo o di minimo per g allora $\nabla g(u_0, v_0) = (0, 0)$. Cerchiamo dunque i punti (u, v) in cui il gradiente di g è nullo. Si ha $g(u, v) = u^3 + u^2v - uv^2 - v^3$, quindi

$$\nabla g(u, v) = (3u^2 + 2uv - v^2, u^2 - 2uv - 3v^2),$$

e i punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3u^2 + 2uv - v^2 = 0 \\ u^2 - 2uv - 3v^2 = 0. \end{cases}$$

Siccome questo sistema non ha soluzioni in $]0, 1[\times]0, 1[$, la funzione g non ha punti stazionari interni al dominio. Resta quindi da studiare il comportamento della funzione sul bordo del quadrato unitario.

Si ha:

$g(0, v) = -v^3$, quindi il valore minimo su questo lato è $g(0, 1) = -1$, mentre il massimo è 0.

$g(1, v) = 1 + v - v^2 - v^3$ che ha un massimo in $v = \frac{1}{3}$, $g(1, \frac{1}{3}) = \frac{32}{27}$,

$g(u, 0) = u^3$ con massimo 1 e minimo 0,

$g(u, 1) = u^3 + u^2 - u - 1$ che per simmetria con il caso precedente ha un minimo in $u = \frac{1}{3}$, $g(\frac{1}{3}, 1) = -\frac{32}{27}$.

Tornando alla funzione data, si ottiene che il valore massimo di f in Q è $f(\frac{\pi}{2}, \arcsin \frac{1}{3}) = \frac{32}{27}$, mentre il valore minimo è $f(\arccos \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2}) = -\frac{32}{27}$.

[La versione gratis di chatgpt, senza registrazione, ha studiato la funzione con la stessa sostituzione ma inizialmente ha sbagliato il minimo, poi ha dato la soluzione corretta.](#)

Esercizio 2. Osserviamo che si tratta di una serie di funzioni di termine generale

$$f_n(x) = \frac{1}{ne^{n(x^2+x-2)}} = \frac{1}{n} (e^{-(x^2+x-2)})^n$$

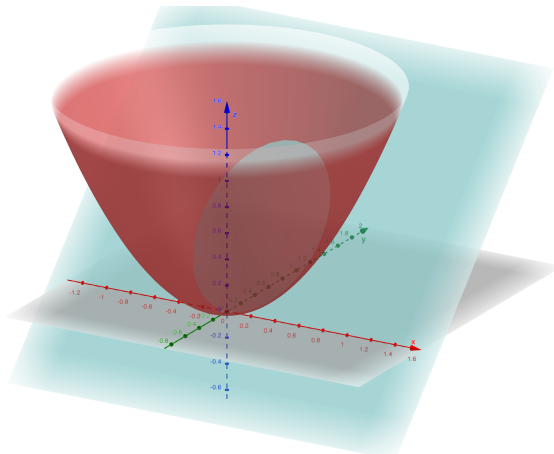
ben definito per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.

Per studiare la convergenza della serie conviene effettuare la sostituzione $t = e^{-(x^2+x-2)}$.

La serie così ottenuta, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n$, ha raggio di convergenza $R = 1$ (infatti $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$),

quindi la serie converge per $t \in (-1, 1)$ e converge uniformemente in ogni intervallo $[-r, r]$ con $0 < r < 1$. La serie non converge per $t = 1$ (serie armonica), converge per $t = -1$ (lo abbiamo visto con il criterio di Leibniz). Comunque, vista la sostituzione, siamo interessati solo al comportamento della serie per $t > 0$.

Scriviamo in termini di x l'insieme di convergenza puntuale e l'insieme di convergenza uniforme. Essendo $t = e^{-(x^2+x-2)}$ si ha $0 < t < 1$ se e solo se $x^2 + x - 2 > 0$, quindi $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$. Quindi la serie data converge puntualmente in $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ e converge uniformemente in $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ per ogni $a < -2$ e per ogni $b > 1$.



Per calcolare la sua somma osserviamo che $\frac{1}{n}t^n = \int_0^t s^{n-1}ds$, quindi la serie che ci interessa si ottiene integrando termine a termine la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}$. Di conseguenza, applicando il teorema di passaggio al limite sotto il segno dell'integrale nell'insieme di convergenza uniforme, otteniamo che per $t \in (0, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n = \int_0^t \frac{1}{1-s} ds = -\log(1-t).$$

La somma della serie data è quindi $-\log(1 - e^{-(x^2+x-2)})$.

Chatgpt ha risolto l'esercizio senza difficoltà.

Esercizio 3. Il supporto della superficie è il grafico della funzione $f(x, y) = y$ definita sul cerchio B che ha come frontiera la circonferenza di equazione $y = x^2 + y^2$. Possiamo scrivere quindi $\sigma : B \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Abbiamo quindi

$$\text{area}(\sigma) = \int_B \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dxdy = \sqrt{2} \text{area}(B) = \sqrt{2}\pi/4.$$

Chatgpt ha risolto l'esercizio senza difficoltà.

Esercizio 4. La forma differenziale ω è chiusa se $d\omega = 0$. Basta quindi calcolare

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y^3}{x^2 + y^6} \right) &= -\frac{3y^2(x^2 + y^6) - 6y^3y^5}{(x^2 + y^6)^2} = -\frac{3x^2y^2 - 3y^8}{(x^2 + y^6)^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3xy^2}{x^2 + y^6} \right) &= \frac{3y^2(x^2 + y^6) - 6x^2y^2}{(x^2 + y^6)^2} = \frac{-3x^2y^2 + 3y^8}{(x^2 + y^6)^2} \end{aligned}$$

e osservando che le due derivate sono uguali concludiamo che ω è chiusa.

Per stabilire se è esatta o no non si può applicare il teorema di Poincaré perché il dominio di definizione di ω , $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, non è stellato. Calcoliamo l'integrale di ω lungo un cammino che gira attorno a $(0,0)$, per esempio $x^2 + y^6 = 1$ che possiamo scrivere come $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sqrt[3]{\sin t}) = (x(t), y(t))$. (Si osserva che γ è un incollamento di due curve regolari, una definita su $[0, \pi]$, l'altra su $[\pi, 2\pi]$ con la stessa espressione.)

Otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{y(t)^3}{x(t)^2 + y(t)^6} x'(t) + \frac{3x(t)y(t)^2}{x(t)^2 + y(t)^6} y'(t) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin t)(-\sin t) + 3\cos^2 t(\sin t)^{2/3} \frac{1}{3}(\sin t)^{-2/3}}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 2\pi \neq 0,\end{aligned}$$

per cui ω non è esatta.

Chatgpt ha inizialmente detto che la forma era esatta con primitiva $-\arctan(x/y^3)$, dopo aver contestato il suo risultato ha concluso che la forma non è esata integrandola sulla circonferenza unitaria.

L'anno scorso non avrebbe passato la prova scritta.