

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II

A.A. 2025/2026 - INGEGNERIA

SIMULAZIONE DEL 19.12.2025

1. Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare i TUTTI i punti di massimo assoluto e di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = (x - y)^2(x + y)$$

nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 0\}$.

2. Mostrare che, fissato $\alpha > 2$, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^\alpha + n^2}$$

converge uniformemente in $[0, +\infty)$. (Suggerimento: usare la convergenza totale.)

3. Calcolare il volume dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > x^2, z > y^2, x > z^2\}.$$

4. Sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x, y, z) = \frac{yz(x^2 - y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} dx + \frac{xz(y^2 - x^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} dy + \frac{x^2 + y^2 + 1 - xy}{x^2 + y^2 + 1} dz.$$

Dire se ω è chiusa e se ω è esatta, giustificando la risposta. In caso affermativo trovare la primitiva di ω che vale 1 in $(1, 1, 1)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. La funzione f è polinomiale, quindi continua. L'insieme D è compatto essendo chiuso e limitato, dunque per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo assoluti in D .

Siccome $(x - y)^2 \geq 0$ e $x + y \geq 0$ in D , si ha

$$f(x, y) \geq 0 \quad \text{in } D.$$

Il valore 0 è assunto lungo $x = y$ con $x^2 = y^2 \leq 2$ e sul bordo $x + y = 0$, sempre con $x^2 = y^2 \leq 2$. Questi sono tutti i punti di minimo assoluto della funzione.

Per trovare il massimo assoluto, consideriamo separatamente l'interno e il bordo di D . Essendo la funzione f differenziabile possiamo usare il teorema di Fermat e cercare i punti stazionari interni. Si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (x - y)(3x + y), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x - y)(-x - 3y). \end{cases}$$

Da $\nabla f = 0$ si ottiene $x = y$, con le condizioni $x^2 + y^2 = 2x^2 < 4$ e $x + y = 2x > 0$ necessarie per avere (x, x) punto interno di D ; si noti che $(0, 0)$ non è interno. Abbiamo già osservato che questi sono punti di minimo assoluto.

Resta da studiare il comportamento della funzione sul bordo di D che è costituito dal segmento $\{x + y = 0\} \cap D$ e dalla porzione di circonferenza $x^2 + y^2 = 4$, $x + y \geq 0$. Abbiamo già visto che tutti i punti del segmento sono punti di minimo assoluto della funzione. Per studiare l'arco di circonferenza possiamo usare la parametrizzazione: $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Sostituiamo nell'espressione di f e otteniamo una funzione di t :

$$\begin{aligned} g(t) &= f(2 \cos t, 2 \sin t) = 8(\cos t - \sin t)^2(\cos t + \sin t) \quad \text{con} \\ g'(t) &= 8(2(\cos t - \sin t)(-\sin t - \cos t)(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)^2(-\sin t + \cos t)) \\ &= 8(\cos t - \sin t)(-2(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2) \\ &= 8(\cos t - \sin t)(-2 - 4 \sin t \cos t + 1 - 2 \sin t \cos t) \\ &= -8(\cos t - \sin t)(1 + 3 \sin(2t)). \end{aligned}$$

I punti critici di g nell'intervallo $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ sono quindi $t = \frac{\pi}{4}$, già trovato e $t = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3}$. Da $\sin t \cos t = -\frac{1}{6}$ e $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ troviamo $\cos t + \sin t = \sqrt{1 - \frac{1}{3}}$ e $(\cos t - \sin t)^2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Quindi il valore massimo di f è:

$$\max_D f = 8 \frac{4}{3} \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{32\sqrt{6}}{9},$$

raggiunto in $(x_{max}, y_{max}) = (\sqrt{1 - \frac{1}{3}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3}}, \sqrt{1 - \frac{1}{3}} - \sqrt{1 + \frac{1}{3}})$.

Soluzione alternativa: cambiare variabili, ponendo $u = x - y$ e $v = x + y$, la funzione diventa $h(u, v) = u^2 v$ da studiare nel dominio:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \leq 4 \quad \text{e} \quad v \geq 0.$$

Si vede subito che $h(u, v) \geq 0$ e che il valore minimo 0 è raggiunto in $(0, v)$ con $v \in [0, 2\sqrt{2}]$ e in $(u, 0)$ con $u \in [0, 2\sqrt{2}]$. Si vede anche che il gradiente di h si annulla in $(0, v)$, che sono punti di minimo.

Sulla rimanente parte di bordo, $u^2 = 8 - v^2$, la funzione da studiare è: $v(8 - v^2)$ con $v \in [0, 2\sqrt{2}]$. Derivando si trova il punto di massimo $v_{max} = \sqrt{\frac{8}{3}}$, quindi il corrispondente $u_{max}^2 = 8 - \frac{8}{3}$ e il valore massimo della funzione: $(8 - \frac{8}{3})\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{32\sqrt{6}}{9}$.

La versione gratis di chatgpt, senza registrazione, ha trovato i punti stazionari e ha studiato la funzione sul bordo ma inizialmente ha sbagliato sia il minimo che il massimo, poi ha dato la soluzione corretta.

Esercizio 2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq 0$ poniamo

$$f_n(x) = \frac{x}{x^\alpha + n^2}.$$

Il criterio di convergenza totale ci dice che se converge la serie numerica $\sum_n \|f_n\|_\infty$ allora la serie $\sum_n f_n$ converge uniformemente. Calcoliamo il massimo di f_n su $[0, +\infty)$. Derivando:

$$f'_n(x) = \frac{n^2 + (1 - \alpha)x^\alpha}{(x^\alpha + n^2)^2}.$$

Dalla condizione $f'_n(x) = 0$ si ottiene

$$x^\alpha = \frac{n^2}{\alpha - 1}.$$

Il valore massimo è quindi

$$\max_{x \geq 0} f_n(x) = \frac{\left(\frac{n^2}{\alpha - 1}\right)^{1/\alpha}}{n^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right)} = C_\alpha \frac{1}{n^{2 - \frac{2}{\alpha}}},$$

dove $C_\alpha > 0$ dipende solo da α .

Da $\alpha > 2$ segue

$$2 - \frac{2}{\alpha} > 1$$

e quindi la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} C_\alpha \frac{1}{n^{2 - \frac{2}{\alpha}}}$$

converge. Applicando il criterio di convergenza totale concludiamo che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^\alpha + n^2}$$

converge uniformemente in $[0, +\infty)$.

Chatgpt ha risolto l'esercizio senza difficoltà.

Esercizio 3. Dalle disuguaglianze che definiscono l'insieme segue che $x, y, z \geq 0$. Inoltre, dalle condizioni $y > x^2$ e $z > y^2$ si ottiene $z > x^4$, mentre da $x > z^2$ segue $z < \sqrt{x}$. Deve essere quindi $x^4 < \sqrt{x}$, cioè $0 \leq x \leq 1$.

I limiti di integrazione sono quindi:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x^4 \leq z \leq \sqrt{x}, \\ x^2 \leq y \leq \sqrt{z}. \end{cases}$$

Il volume richiesto è:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_{x^4}^{\sqrt{x}} \int_{x^2}^{\sqrt{z}} dy \, dz \, dx = \\ &= \int_0^1 \int_{x^4}^{\sqrt{x}} (\sqrt{z} - x^2) dz \, dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} x^{3/4} - \frac{2}{3} x^6 - x^{5/2} + x^6 \right) dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Chatgpt ha risolto l'esercizio senza difficoltà.

Esercizio 4. Scriviamo $\omega = P \, dx + Q \, dy + R \, dz$, con

$$P = \frac{yz(x^2 - y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \quad Q = \frac{xz(y^2 - x^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \quad R = \frac{x^2 + y^2 + 1 - xy}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Calcolando le derivate parziali di P , Q e R coinvolte in $d\omega$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (\text{senza calcoli}) \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{y(x^2 - y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{x(y^2 - x^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{\partial R}{\partial y}. \end{aligned}$$

Pertanto $d\omega = 0$, ossia la forma ω è chiusa. Siccome ω è definita su tutto $\mathbb{R}^3$, che è un insieme stellato, dal teorema di Poincaré segue che ω è anche esatta.

Una primitiva di ω è una funzione $F(x, y, z)$ tale che $dF = \omega$. Il termine dz suggerisce di cercare F della forma

$$F(x, y, z) = z \frac{x^2 + y^2 + 1 - xy}{x^2 + y^2 + 1} + G(x, y).$$

Imponendo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

troviamo che le derivate parziali di G sono nulle, quindi G è costante.

Imponendo la condizione $F(1, 1, 1) = 1$, si ha

$$1 = \frac{2}{3} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{3}.$$

In conclusione, la forma ω è chiusa ed esatta e la sua primitiva che vale 1 in $(1, 1, 1)$ è data da

$$F(x, y, z) = z \frac{x^2 + y^2 + 1 - xy}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{1}{3}.$$

Chatgpt ha risolto l'esercizio senza difficoltà.