

Reserving Danni: dai modelli deterministici ai modelli stocastici

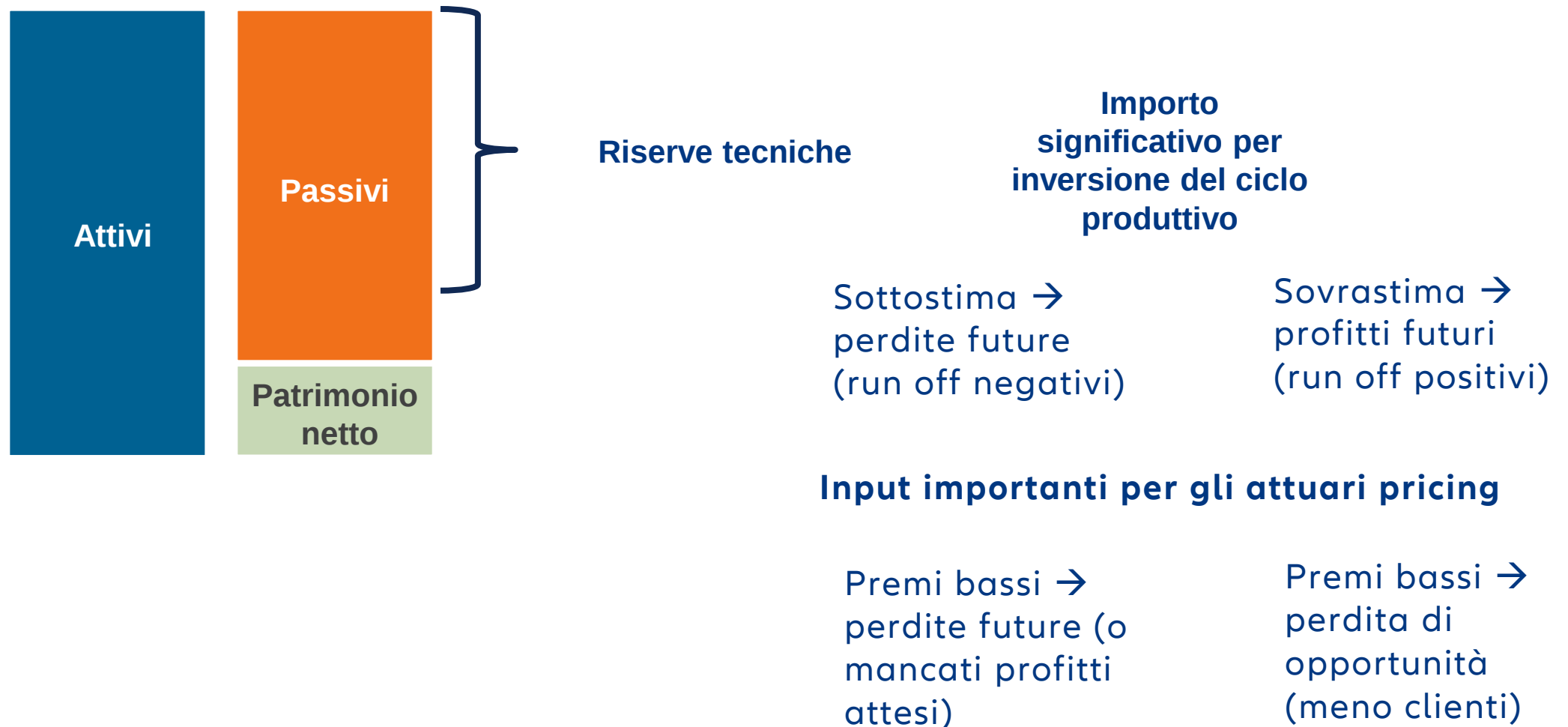
Allianz S.p.A

Attuariato Danni
12 Dicembre 2025

Stefano Russo – stefano.russo@allianz.it
Marianna Grassini – marianna.grassini@allianz.it
Chiara Ermacora – chiara.ermacora@allianz.it

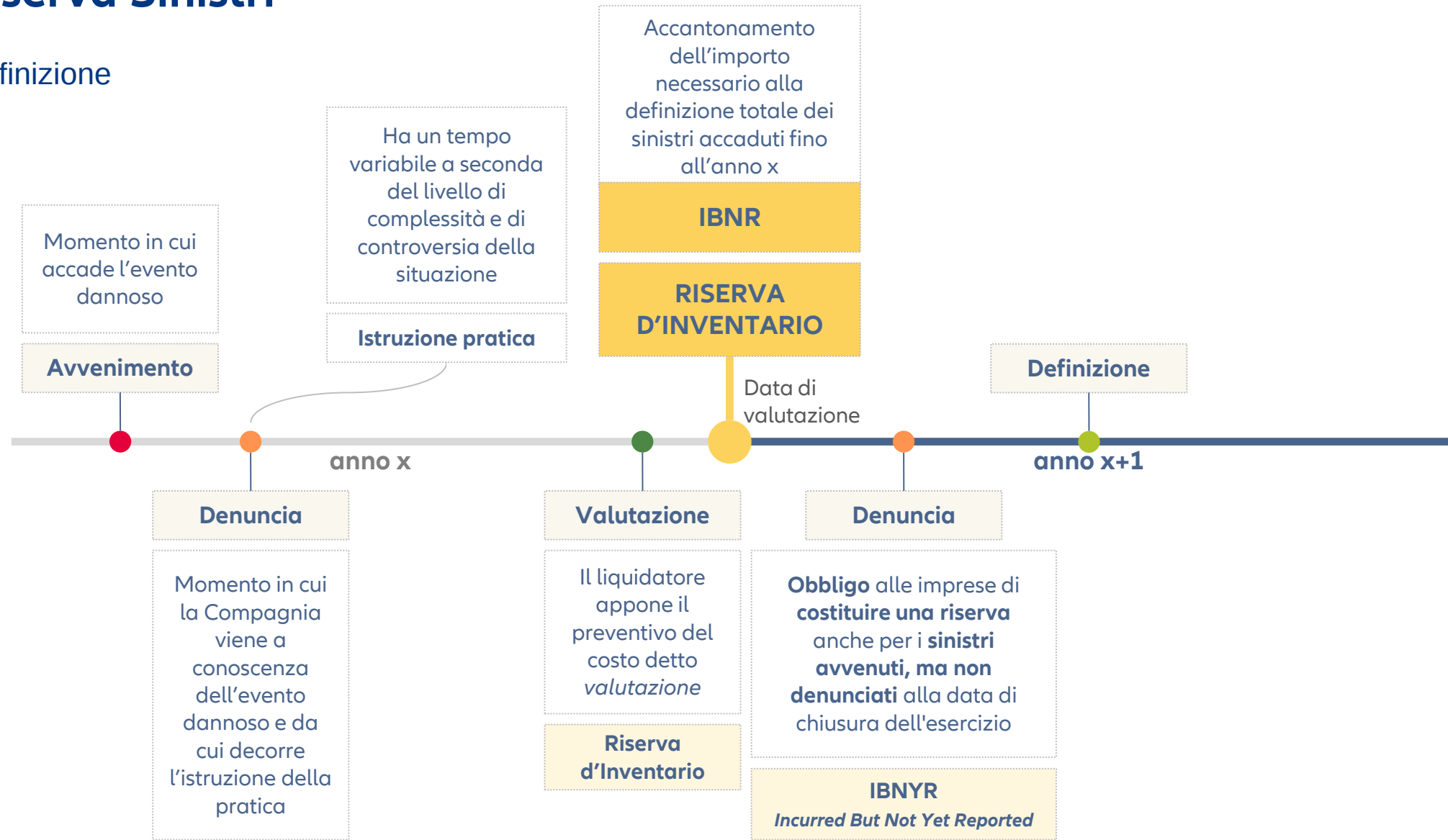
AGENDA

1. Introduzione
2. Modelli deterministici
3. Focus ResQ
4. Modelli stocastici
5. Focus ResQ
6. Reserve Risk

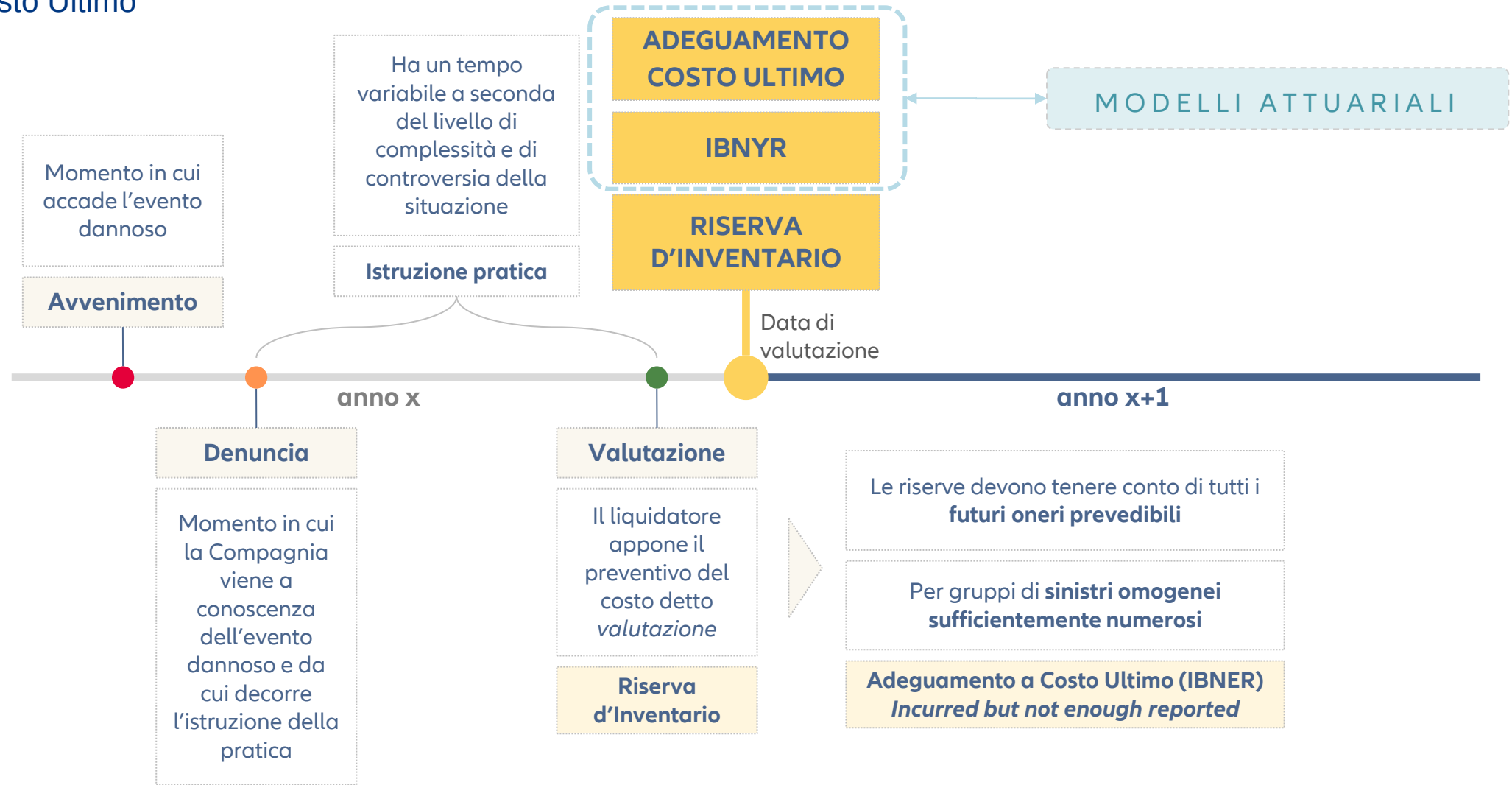


Riserva Sinistri

Definizione



Costo Ultimo



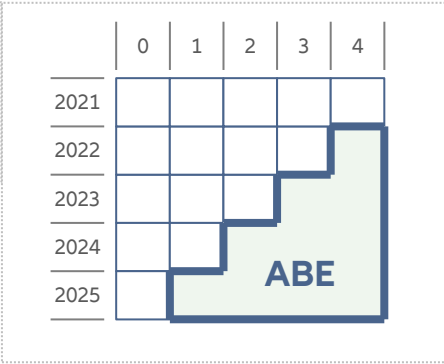
Dal dato tecnico al COSTO ULTIMO

Costo Ultimo = Pagato + Riserva d'Inventario + IBNR

MODELLI ATTUARIALI

1

STIMA del COSTO ULTIMO
(Actuarial Best Estimate)



Riserva IBNYR – ottenuta tramite modelli attuariali

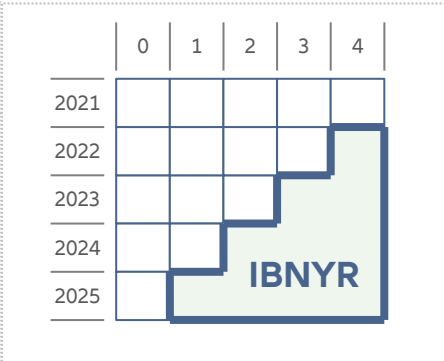
2

Riserva IBNER – ottenuta come differenza tra Riserva ABE e Riserva IBNYR

2

STIMA DEI SINISTRI TARDIVI

IBNYR: Incurred But Not Yet Reported



Future denunce il cui costo rappresenta la Riserva IBNYR

Definizione



AGENDA

1. Introduzione

2. Modelli deterministici

3. Focus ResQ

4. Modelli stocastici

5. Focus ResQ

6. Reserve Risk

Modelli deterministici

→ sulla base dei dati e di opportuni algoritmi forniscono una stima globale del costo ultimo per un fissato portafoglio.

- **DFM (Development Factor Method)**

- Paid P_{ij}
- Incurred ⁽¹⁾ I_{ij}

→ Caso particolare: Chain Ladder

- **FS (Frequency-Severity Method)**

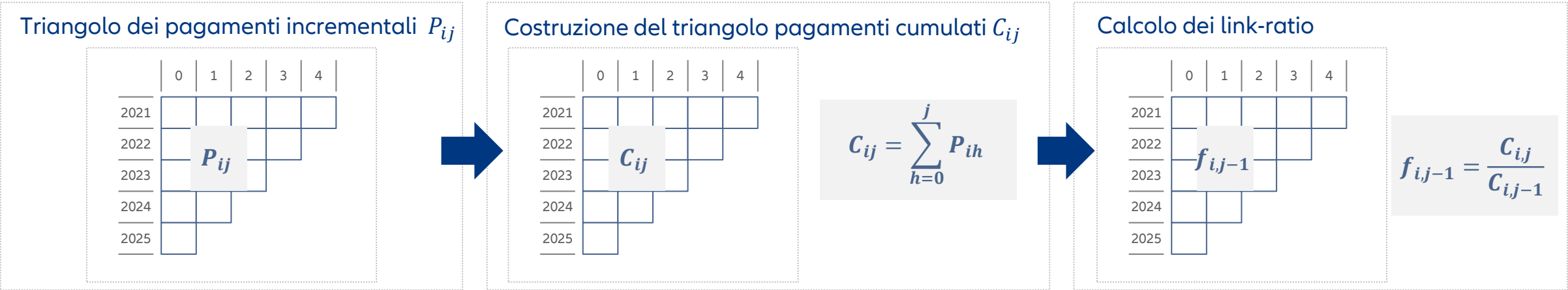
- Paid P_{ij}
- Incurred I_{ij}

⁽¹⁾ Incurred: Pagato + Riserva d'Inventario

Modelli Deterministici per il calcolo delle riserve

- DFM (Development Factor Method)

Paid P_{ij} $i = 2021, \dots, 2025$ e $j = 0, \dots, 4$



Modelli Deterministici per il calcolo delle riserve

- DFM (Development Factor Method)

Paid P_{ij} $i = 2021, \dots, 2025$ e $j = 0, \dots, 4$

LDF (Loss Development Factors)

$f_{i,j-1}$	0	1	2	3	4
2021	1,8231	1,2569	1,0417	1,0400	
2022	1,9201	1,2763	1,0225		
2023	1,7557	1,1905			
2024	2,1151				
2025					
LDF	1,9050	1,2392	1,0317	1,0400	

Stima delle quantità del triangolo inferiore e determinazione del costo ultimo

C_{ij}	0	1	2	3	4
2021	995	1814	2280	2375	2470
2022	1014	1947	2485	2541	2643
2023	1220	2142	2550	2631	2631
2024	1182	2500	3098	3196	3324
2025	1240	2362	2927	3020	3141

$\times 1,9050$ $\times 1,2392$ $\times 1,0317$ $\times 1,0400$

Costo Ultimo $\hat{C}_{it}$	Riserva R_i
2470	0
2643	102
2631	186
3324	824
3141	1901
	3013

$$\hat{C}_{ij} = C_{i,j-1} \times LDF_{j-1} \text{ con } i + j > t$$

Riserva per ogni anno di origine:
 $R_i = \hat{C}_{i,t} - C_{i,t-i} \text{ con } i + j > t$

Riserva complessiva:
 $R = \sum_{i=0}^t R_i$

Alternativa ai modelli Paid

→ modelli incurred (= pagamenti + riserva d'inventario (valutazione dei liquidatori))

→ si vuole considerare nella stima anche il dato di riserva tecnica dei liquidatori

→ si prediligono modelli paid nel caso non si ritenga adeguata la riserva tecnica dei liquidatori o nel caso in cui non la loro valutazione non sia stabile nel tempo.

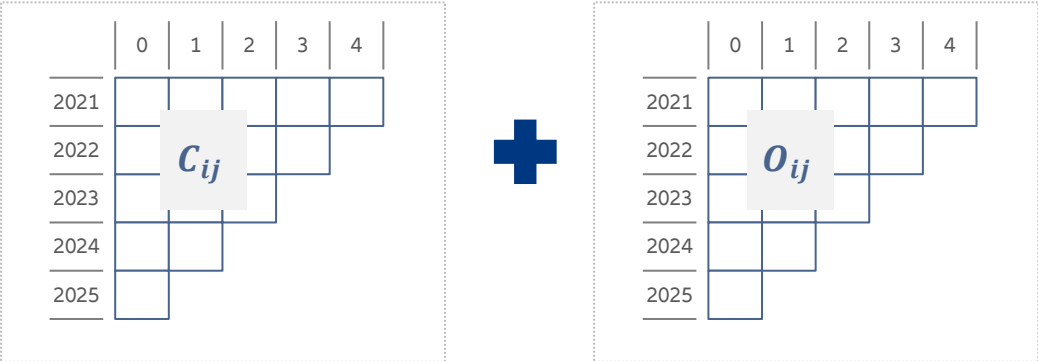
Modelli Deterministici per il calcolo delle riserve

- DFM (Development Factor Method)

Incurred $I_{ij} = C_{ij} + O_{ij}$ dove O_{ij} rappresenta la riserva appostata dai liquidatori (*Outstanding*)

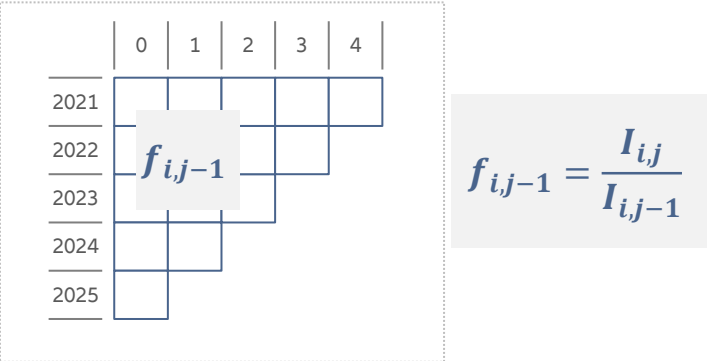
$i = 2021, \dots, 2025$ e $j = 0, \dots, 4$

Triangolo Incurred I_{ij} dato dalla somma dei due triangoli



$$I_{ij} = C_{ij} + O_{ij}$$

Calcolo dei link-ratio



LDF (Loss Development Factors)

$f_{i,j-1}$	0	1	2	3	4
2021	1,3179	1,1968	1,0341	1,0323	
2022	1,3567	1,2121	1,0165		
2023	1,2761	1,1393			
2024	1,4430				
2025					

Actuarial Judgment

LDF	1,3499	1,1804	1,0250	1,0323
-----	--------	--------	--------	--------

I_{ij}	0	1	2	3	4
2021	1727	2276	2724	2817	2908
2022	1769	2400	2909	2957	3053
2023	2155	2750	3133	3211	3315
2024	2174	3137	3703	3796	3918
2025	2087	2817	3326	3409	3519

Costo Ultimo

$\hat{I}_{it}$
2908
3053
3315
3918
3519

IBNR

0
96
182
781
1432
2491

$$IBNR_i = \hat{I}_{i,t} - I_{i,t-i}$$

Riserva per ogni anno di origine:
 $R_i = IBNR_i + O_{i,t-i}$ con $i + j > t$

oppure

$$R_i = \hat{I}_{i,t} - C_{i,t-i}$$
 con $i + j > t$

Riserva complessiva:

$$R = \sum_{i=0}^t R_i$$

Modelli Deterministici per il calcolo delle riserve

- Frequency – Severity (FS)
Paid

Triangolo dei pagamenti cumulati C_{ij}

	0	1	2	3	4
2021					
2022		C_{ij}			
2023					
2024					
2025					

Triangolo cumulato del numero di sinistri n_{ij}
(chiusi a titolo definitivo; w/o SS)

	0	1	2	3	4
2021					
2022		n_{ij}			
2023					
2024					
2025					

Triangolo del costo medio definito c_{ij}
(chiusi a titolo definitivo; w/o SS)

	0	1	2	3	4
2021					
2022		c_{ij}			
2023					
2024					
2025					

$$c_{ij} = \frac{C_{ij}}{n_{ij}}$$

Determinazione del Costo Ultimo $\hat{C}_{it}$

	$\hat{n}_{it}$	$\hat{c}_{it}$	$\hat{C}_{it}$
2021	92	24	2208
2022	143	20	2860
2023	120	22	2640
2024	150	20	3000
2025	163	21	3423

$$\hat{C}_{it} = \hat{n}_{it} \times \hat{c}_{it}$$

DFM Paid

DFM Paid

Stima del
numero
ultimo di
sinistri $\rightarrow \hat{n}_{it}$

	$\hat{n}_{it}$
2021	92
2022	143
2023	120
2024	150
2025	163

Stima del
Costo Medio
Ultimo
 $\rightarrow \hat{c}_{it}$

	$\hat{c}_{it}$
2021	24
2022	20
2023	22
2024	20
2025	21

Modelli Deterministici per il calcolo delle riserve

- Frequency – Severity (FS)
Incurred

Triangolo Incurred I_{ij}

	0	1	2	3	4
2021					
2022		I_{ij}			
2023					
2024					
2025					

Triangolo cumulato del numero di sinistri m_{ij}
(chiusi a titolo definitivo + aperti ; w/o SS)

	0	1	2	3	4
2021					
2022		m_{ij}			
2023					
2024					
2025					

Triangolo del costo medio denunciato con seguito cm_{ij}
(chiusi a titolo definitivo + aperti; w/o SS)

	0	1	2	3	4
2021					
2022		cm_{ij}			
2023					
2024					
2025					

$$cm_{ij} = \frac{I_{ij}}{m_{ij}}$$

Determinazione del Costo Ultimo $\hat{I}_{ij}$

	$\hat{m}_{it}$	$\hat{cm}_{it}$	$\hat{I}_{it}$
2021	96	34	3264
2022	133	51	6783
2023	140	61	8540
2024	153	55	8415
2025	123	71	8733

$$\hat{I}_{it} = \hat{m}_{it} \times \hat{cm}_{it}$$

DFM Incurred

Stima del
numero
ultimo di
sinistri $\rightarrow \hat{m}_{it}$

	$\hat{m}_{it}$
2021	96
2022	133
2023	140
2024	153
2025	123

DFM Incurred

Stima del
Costo Medio
Ultimo
 $\rightarrow \hat{cm}_{it}$

	$\hat{cm}_{it}$
2021	34
2022	51
2023	61
2024	55
2025	71

DFM (Development Factor Method)

- Si modella il costo totale dei sinistri senza andare a separare la frequenza sinistri e i costi medi.
- Ipotesi che si possa adottare per il futuro lo stesso sviluppo osservato nel passato
- No cambi di portafoglio, cambi politiche liquidative e velocità di liquidazione, cambi nei trend inflattivi

FS (Frequency-Severity Method)

- Separa la stima del numero dei sinistri e dei costi medi utile in casistiche con numero di sinistri che può variare molto negli anni (es. dipendenza da eventi atmosferici) o nel caso di sinistri large

Paid P_{ij}

- Non si considera la riserva tecnica dei liquidatori nella stima
- Scelta da prediligere nel caso si valuti la riserva d'inventario non stabile nel tempo (es. se sottostima o sovrastima la valutazione dei sinistri in modo variabile nel tempo)

Incurred I_{ij}

- La proiezione a costo ultimo tiene conto anche delle riserve d'inventario
- Da prediligere nel caso di adeguatezza delle riserve e nel caso di LoB con sinistri molto complessi e pertanto con volumi di riserva tecnica elevati rispetto al dato del pagato (es. rami long tail)

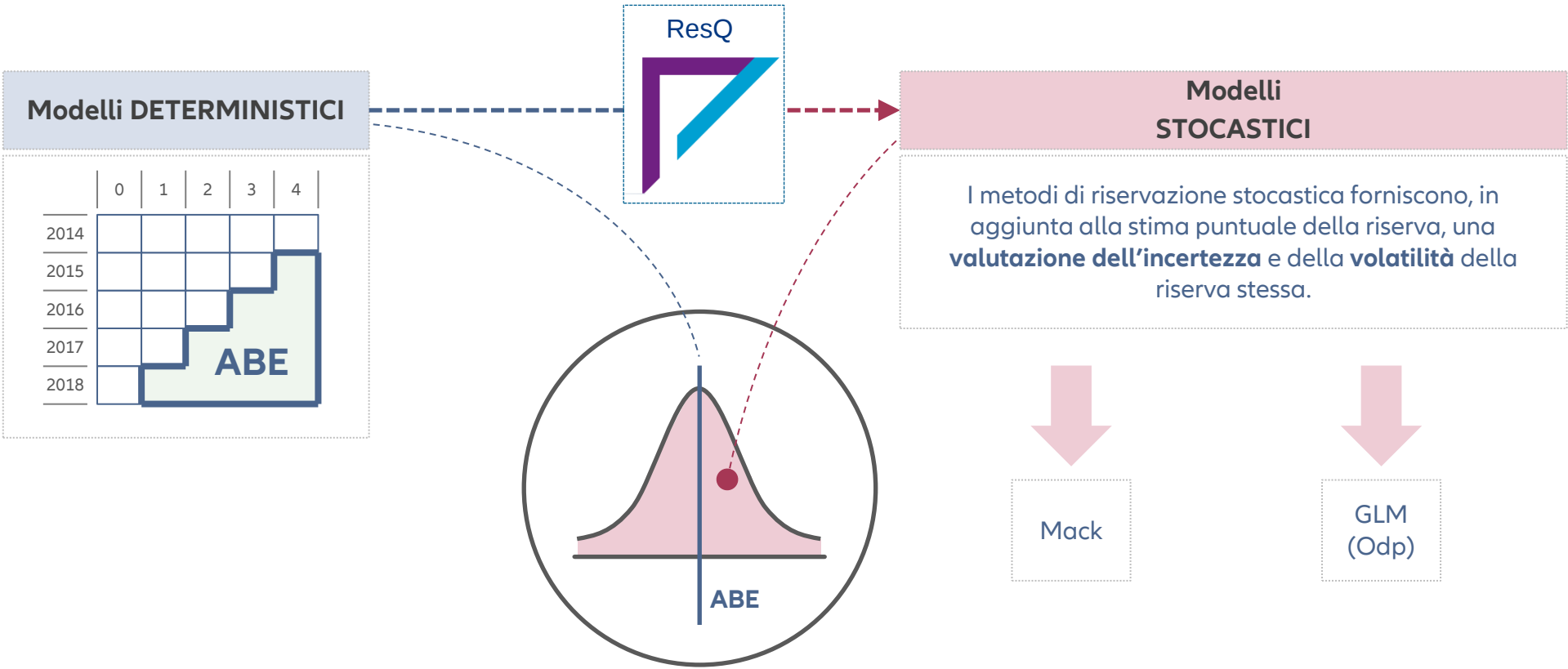
AGENDA

1. Introduzione
2. Modelli deterministici
- 3. Focus ResQ**
4. Modelli stocastici
5. Focus ResQ
6. Reserve Risk

AGENDA

1. Introduzione
2. Modelli deterministici
3. Focus ResQ
- 4. Modelli stocastici**
5. Focus ResQ
6. Reserve Risk

Definizione



Modello di Mack

Ipotesi:

- 1) $\{C_{0,0}, \dots, C_{0,t}\}, \{C_{1,0}, \dots, C_{1,t}\}, \dots, \{C_{t,0}, \dots, C_{t,t}\}$ pagamenti cumulati stocasticamente indipendenti
- 2) Il processo $(C_{ij})_{j \geq 0}$ è una catena markoviana.
- 3) $E[C_{i,j} | C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}] = E[C_{i,j} | C_{i,j-1}] = f_{j-1} C_{i,j-1}.$
- 4) $VAR[C_{i,j} | C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}] = VAR[C_{i,j} | C_{i,j-1}] = \sigma_{j-1}^2 C_{i,j-1}.$



Valori attesi del modello di *Mack* = stime del metodo della catena

Modello di Mack

Alcuni stimatori:

$$\tilde{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{t-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{t-j-1} C_{i,j}}, \quad j \in \{0, \dots, t-1\}$$

$$\tilde{\sigma}_j^2 = \begin{cases} \frac{1}{t-j-1} \sum_{i=0}^{t-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \tilde{f}_j \right)^2, & j = 0, \dots, t-2 \\ \min \left\{ \tilde{\sigma}_{t-2}^2, \tilde{\sigma}_{t-3}^2, \frac{\tilde{\sigma}_{t-2}^4}{\tilde{\sigma}_{t-3}^2} \right\}, & j = t-1 \end{cases}$$

$$\tilde{C}_{i,j} = C_{i,t-1} \prod_{h=t-1}^{j-1} \tilde{f}_h, \quad i+j > t$$

$$\widetilde{R}_i = \tilde{C}_{i,j} - C_{i,t-1}, \quad i \in \{1, \dots, t\} \quad \text{e} \quad \tilde{R} = \sum_{i=1}^t \widetilde{R}_i$$

Modelli lineari generalizzati (GLM)

- Caratterizzati da :

(1) Ipotesi probabilistiche: $Y_1, \dots, Y_n$ stocasticamente indipendenti con distribuzioni appartenenti ad una medesima famiglia esponenziale lineare.

(2) Ipotesi strutturali: legame tra la speranza matematica di Y_i , μ_i , ed il vettore delle variabili esplicative $\mathbf{x}_i$:

$$E(Y_i) = \mu_i = g^{-1}(h_i) = g^{-1}(\mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta})$$

- Modelli con quasi-verosimiglianza (estensione dei GLM):

(1) Variabili risposta stocasticamente indipendenti

(2) $E(Y_i) = \mu_i = g^{-1}(h_i) = g^{-1}(\mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta})$ e $VAR(Y_i) = \frac{\phi}{\omega_i} V(\mu_i)$

Modelli lineari generalizzati (GLM) per la riserva sinistri: Over-Dispersed Poisson (ODP)



1. Variabili risposta: pagamenti incrementali.
2. Variabili esplicative: indicatori di anno di origine e di sviluppo



Modello Poisson con sovradisersione:

1. Variabili risposta $P_{i,j}$
2. Speranza matematica della variabile risposta:

$$E(P_{i,j}) = \mu_{i,j} = g^{-1}(\alpha_i + \beta_j) \Rightarrow \ln(\mu_{i,j}) = (\alpha_i + \beta_j)$$

1. La varianza delle variabili risposta è

$$VAR(P_{i,j}) = \phi \mu_{i,j}$$



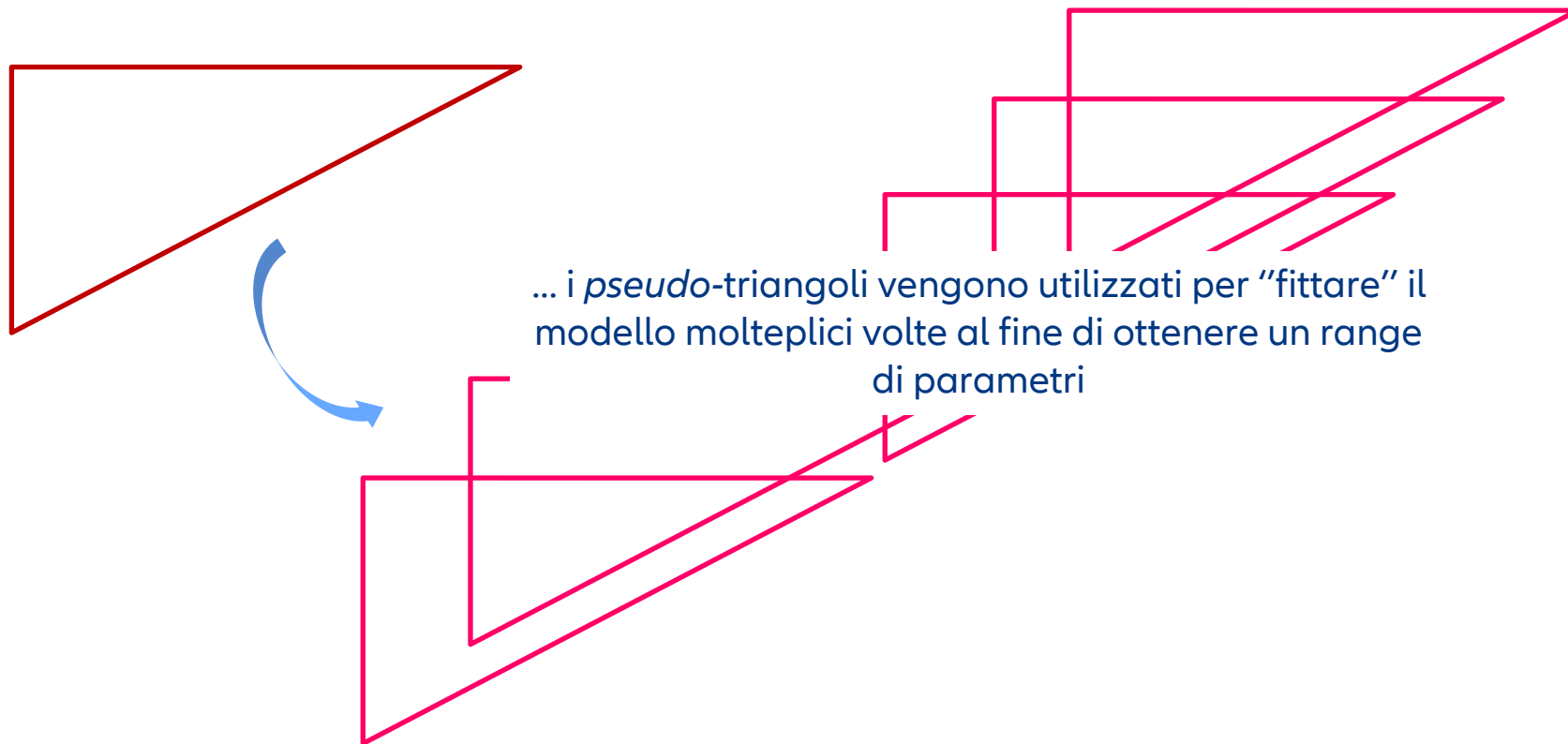
Stesse stime del metodo della catena

Steps successivi



Parameter Error

Lo scopo della procedura **bootstrap** è quello di ottenere un grande numero di nuovi *pseudo-triangoli*, da un singolo set di dati osservati ...

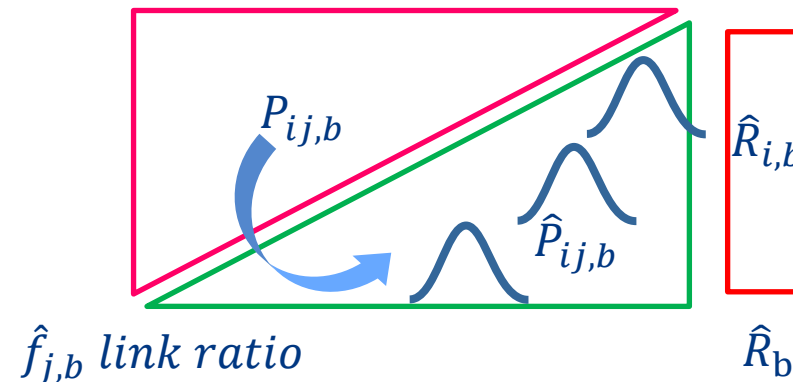


Process Error

A questo punto, per ciascun set di parametri bootstrap si simulano i pagamenti futuri come realizzazioni possibili del processo stocastico sottostante, usando un **random number generator**, basato su un'ipotesi di distribuzione coerente con il modello scelto.

Generalmente i modelli Mack ipotizzano una distribuzione Normale per i link ratios, mentre l'ODP assume una distribuzione Gamma, che è "simile" ad una ODP.

Ripetendo il procedimento otteniamo una distribuzione della riserva.

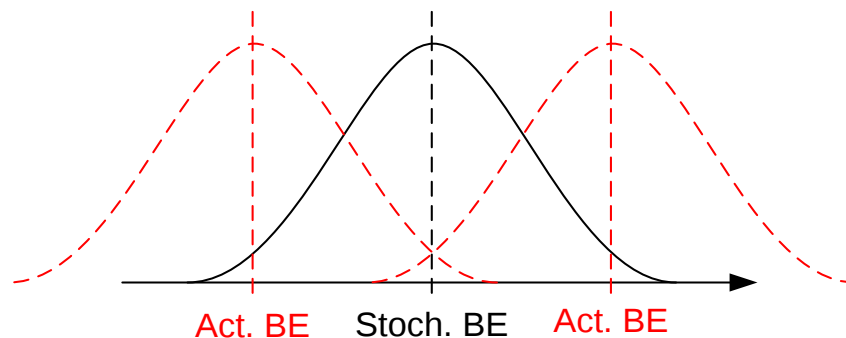


Shift sull'ABE

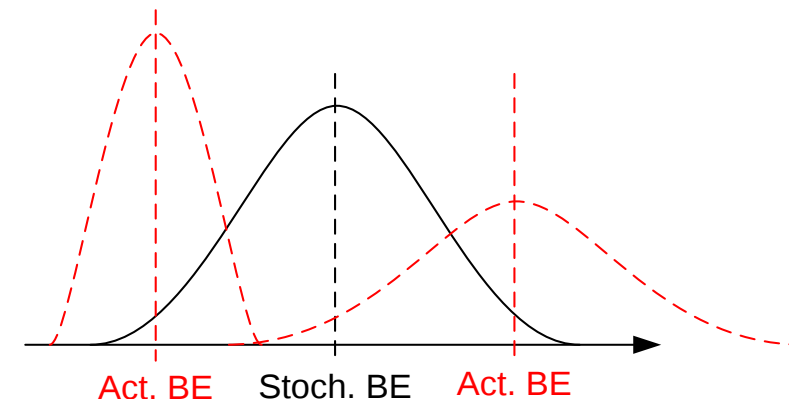
La media della distribuzione ottenuta **non corrisponde necessariamente** alla best estimate attuariale (spesso risultato di modelli deterministici differenti). In ogni caso, noi siamo interessati alla distribuzione predittiva sulla best estimate scelta dall'attuario, perciò si effettua uno shift:

Due “tipologie” di shift:

Additivo (stessa SD)



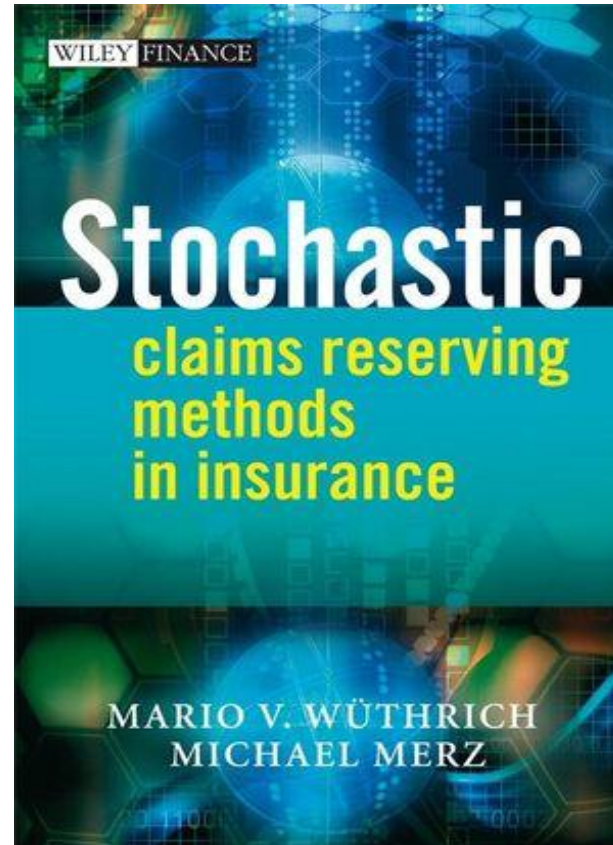
Moltiplicativo (stesso CoV)



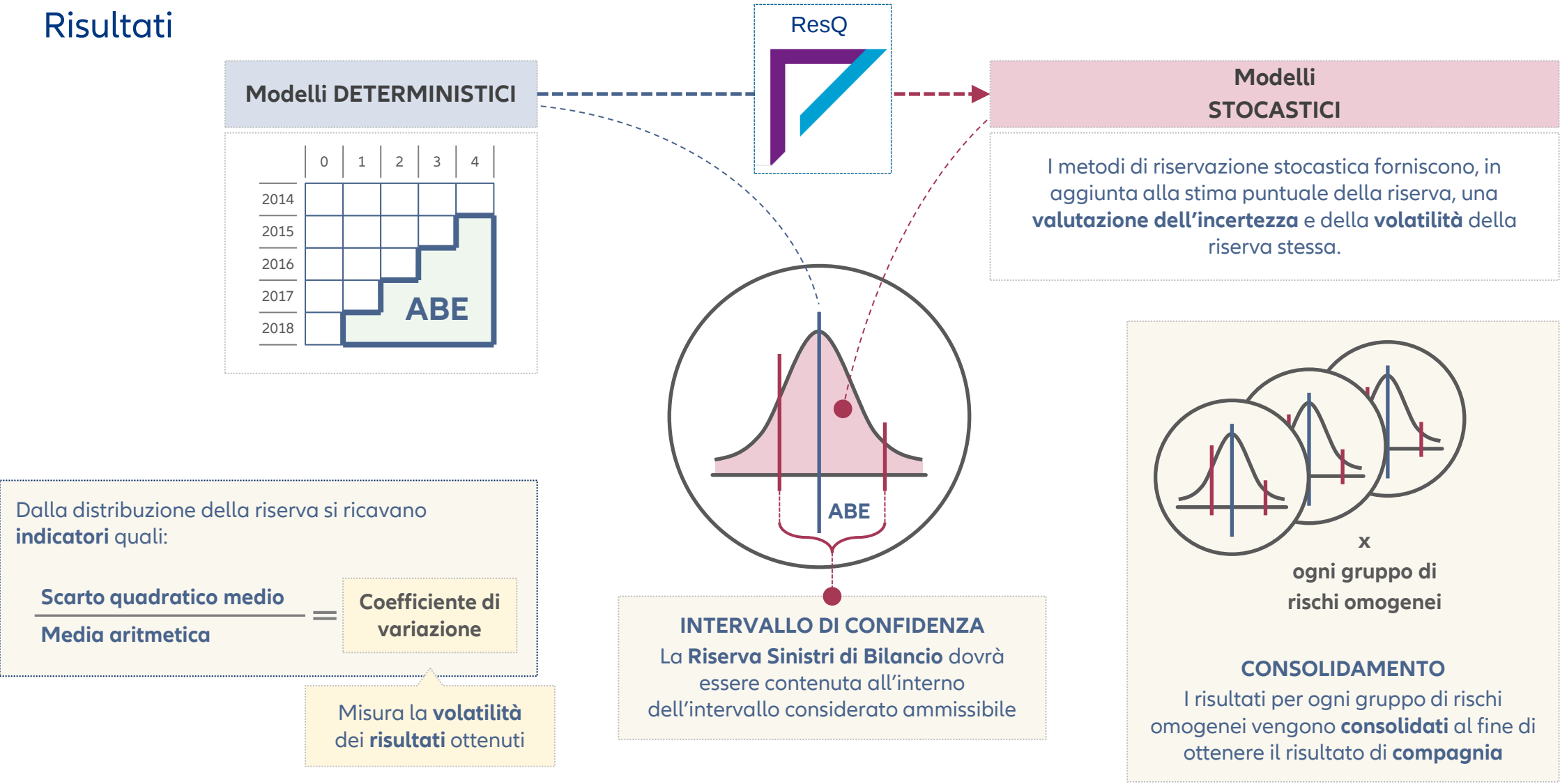
La regola consiste nello scegliere sempre l'approccio più prudente (i.e. se $ABE > Stoc. BE$ si sceglie il **moltiplicativo**, altrimenti l'**additivo**).

Modelli Stocastici

Per maggiori informazioni sulla parte teorica



Risultati



AGENDA

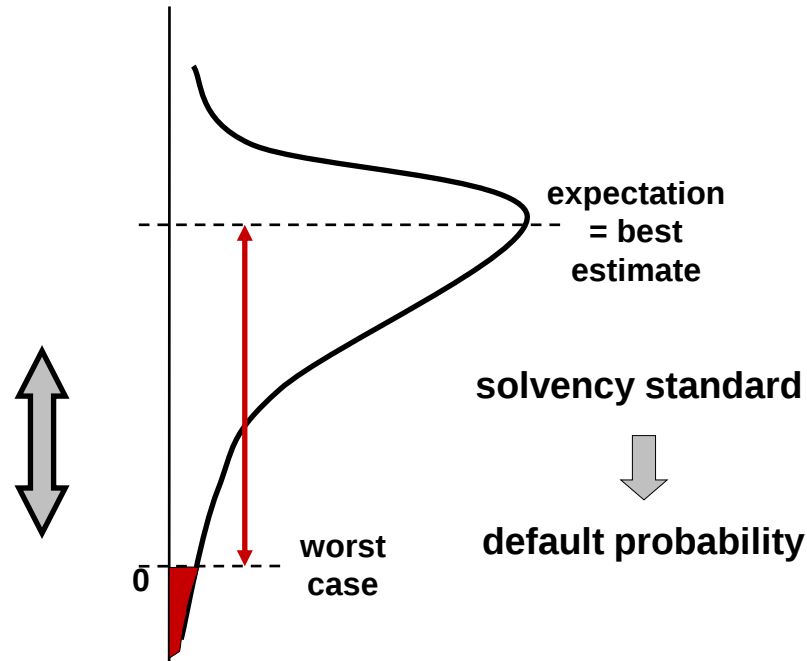
1. Introduzione
2. Modelli deterministici
3. Focus ResQ
4. Modelli stocastici
- 5. Focus ResQ**
6. Reserve Risk

AGENDA

1. Introduzione
2. Modelli deterministici
3. Focus ResQ
4. Modelli stocastici
5. Focus ResQ
- 6. Reserve Risk**



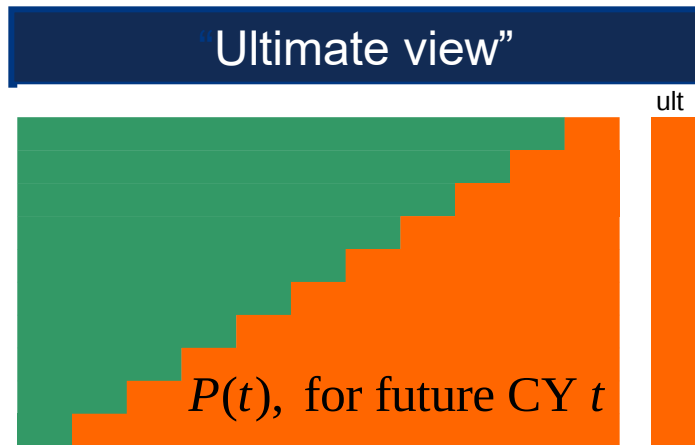
MVBS
Bilancio Solvency II
(Best Estimate)



Il requisito patrimoniale di solvibilità
corrisponde al **valore a rischio dei
fondi propri di base** dell'impresa di
assicurazione o di riassicurazione
soggetto ad un **livello di
confidenza del 99,5 % su un
periodo di un anno**

The SCR (Solvency Capital
Requirement) should correspond to
the **Value-at-Risk of the basic own
funds** of an insurance undertaking
subject to a confidence level of
99.5% over a one-year period

I modelli stocastici visti fino ad ora considerano «shock» sull'intero orizzonte di run off («Ultimate view»)

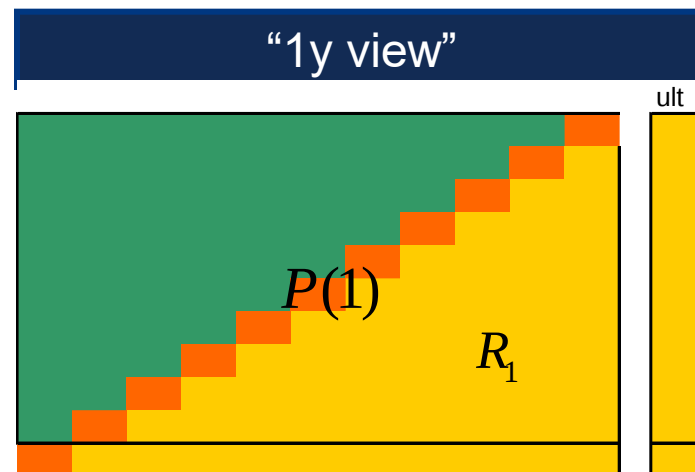


$$CDR_{\infty} = R_0 - \sum_{\text{future CY } t} P(t)$$

↓

$$VAR(CDR_{\infty}) = VAR\left(\sum_{\text{future CY } t} P(t)\right)$$

Con Solvency II nasce il concetto «one year»



$$CDR_1 = R_0 - P(1) - R_1$$

↓

$$VAR(CDR_1) = VAR(P(1) + R_1)$$

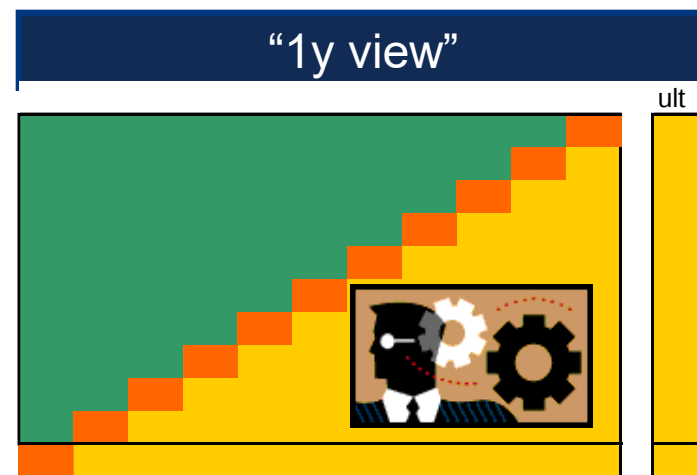
One Year View Reserve Risk – 2 approcci

Modello di Merz e Wüthrich

- Basato sulle assunzioni del modello di Mack (1993) + ulteriori assunzioni (martingale process)
- Utilizzato per il calcolo del Requisito di Capitale (SCR) utilizzando gli USP (Undertaking Specific Parameters – approccio di credibilità con parametri della standard formula)

Approccio simulativo – chiamato «re-reserving algorithm»

- Si simula la diagonale del prossimo anno
- Si calcola la riserva deterministica con il nuovo stato di informazione



Buchwalder, M., Bühlmann, H., Merz, M. e Wüthrich, M. V. (2006). The mean square error of prediction in the chain ladder reserving method (Mack and Murphy revisited). ASTIN Bulletin 36, num. 2, pag. 521-542.

Carrato, A. (2020) Bridging Reserving and Business Steering

Carrato, A. (2015) Introduction to Stochastic Reserving

England, P. e Verrall, R. (2006), Predictive Distributions of Outstanding Liabilities in General Insurance. Annals of Actuarial Science 1, num. 2, pag. 221-270

Mack, T. (1993). Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. ASTIN

Merz, M. e Wüthrich, M. V. (2008). Modelling the claims development result for solvency purposes. CAS E-Forum , Fall 2008, pag. 542-568.

Ohlsson, Esbjorn, Lauzenings (2008) - The one-year non-life insurance risk

Wüthrich, M. V e Merz, M. (2008). Stochastic claims reserving methods in insurance. Wiley finance.