

Istituzione di Matematica - DIA UNITS

Prova di Esame 2. 2025-26

1. $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}^c) = ?$. Dimostri la verità della vostra soluzione o utilizzando un argomento logico o mostrando la verità con un'esempio con l'insieme universale $\mathcal{U} = \{n \in \mathbb{Z} : 1 \leq n \leq 20\}$ e due sottoinsiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

2. Calcola la derivata delle seguenti funzioni;

(a) $f(x) = \sqrt{\sin(2x) - x^3}$

(b) $f(x) = \frac{\sin^2 x - 1}{\sin(2x)}$

3. Studia la funzione:

$$f(x) = x - \sin(x)$$

In particolare trova il dominio, gli asintoti (se ci sono), l'intersezione con gli assi del piano cartesiano, i punti critici (dove $f'(x) = 0$), la concavità (data dal segno di $f''(x)$) e alla fine fai il disegno della funzione.

4. Calcola i seguenti integrali;

(a) $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^3 - 3x}} dx$

(b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 4} dx$

5. Trova l'area delimitata dalle due funzioni $y = \sqrt{x - 1}$ e $y = -x/2 + 1/2$ da $x = 1$ a $x = 4$. Per aiutarti fai un disegno delle due curve indicando l'area calcolata.

6. Data la superficie quadrica:

$$x^2 + y^2 - 4z^2 = 9,$$

descrivi le forme geometriche ottenute mettendo:

(a) $x = 0$

(b) $y = 0$

(c) $z = 0$

Disegna la forma geometrica della superficie in tre dimensioni tenendo conto dei risultati ottenuti sopra.

7. Trovi la rete che rappresenta l'intersezione tra i piani $2x + 3y - z = 2$ e $x + y + 3z = 1$ e calcoli la distanza tra questa rete e l'origine $(0, 0, 0)$.