

Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 5

Giustificare adeguatamente le risposte.

- ~~1)~~ Dimostrare che se X e Y sono T_1 allora $X \times Y$ è T_1 .
- ~~2)~~ Dimostrare che se X e Y sono T_2 allora $X \times Y$ è T_2 .
- ~~3)~~ Dimostrare che se X e Y sono T_3 allora $X \times Y$ è T_3 .
- ~~4)~~ Estendere i tre esercizi precedenti al caso di prodotti arbitrari.
- ~~5)~~ Consideriamo il *piano di Sorgenfrey* $\mathbb{R}_\ell^2 := \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ e sia $L \subset \mathbb{R}_\ell^2$ la retta di equazione $L: x + y = 0$. Dimostrare che L è chiuso in $\mathbb{R}_\ell^2$. Qual è la topologia indotta su L ?
- ~~6)~~ Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione tra spazi topologici con Y di Hausdorff. Dimostrare che se f è continua allora il grafico $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ è chiuso. Vale il viceversa?
- ~~7)~~ Dimostrare che uno spazio quoziente $X/\sim$ è $T_1 \Leftrightarrow$ tutte le classi d'equivalenza sono chiuse in X (si dice che $\sim$ è una *relazione d'equivalenza chiusa*).
- ~~8)~~ Dimostrare che se $X/\sim$ è T_2 allora il grafico $\Gamma_\sim := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$ è chiuso in $X \times X$.
- ~~9)~~ Dimostrare che se $\sim$ è una relazione d'equivalenza su X con grafico chiuso e l'applicazione quoziente $\pi: X \rightarrow X/\sim$ è aperta allora $X/\sim$ è T_2 .
- ~~10)~~ Dimostrare che la retta con due origini R_+ è T_1 ma non T_2 .
- ~~11)~~ Dimostrare che $\mathbb{R}_\ell$ è T_4 (spiegare perché $U \cap V = \emptyset$, vedi Lezione 9).
- ~~12)~~ Dimostrare che uno spazio topologico X è $T_1 \Leftrightarrow$ ogni punto $x \in X$ è intersezione dei suoi interni.

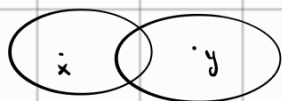
7 luglio 5

1) Dimostrare che se X e Y sono $T_1 \Rightarrow X \times Y$ è T_1 .

Risposta:

Def:

X è $T_1 \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists U, V \subset X$ aperti t.c. $x_1 \in U \setminus V, x_2 \in V \setminus U$



fissati $x_1, x_2 \in X$, esistono due aperti t.c.

$x_1 \in U \setminus V^c$ e $x_2 \in V \setminus U^c$

Def:

Y è $T_2 \Leftrightarrow \forall y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2 \Rightarrow \exists U_1, V_1 \subset Y$ aperti t.c. $y_1 \in U_1 \setminus V_1,$

$y_2 \in U_2 \setminus V_2$

devo dimostrare che $X \times Y$ è $T_1 \Rightarrow$ fissati due punti, devo costruire due aperti tali che mi soddisfino la condizione T_1

fisso $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Siccome X è $T_1 \Rightarrow \exists U_1, U_2 \subset X$ aperti tali che $x_1 \in U_1 \setminus U_2, x_2 \in U_2 \setminus U_1$.

Y è $T_1 \Rightarrow \exists V_1, V_2 \subset Y$ aperti tali che $y_1 \in V_1 \setminus V_2, y_2 \in V_2 \setminus V_1$

considero quindi $U_1 \times V_1 \subset X \times Y$ e $U_2 \times V_2 \subset X \times Y$, aperti per def. di

topologia prodotto $\Rightarrow$ ho che $(x_1, y_1) \in (U_1 \times V_1) \setminus (U_2 \times V_2)$ e

$(x_2, y_2) \in (U_2 \times V_2) \setminus (U_1 \times V_1)$

$(x_1, y_1) \in (U_1 \times V_1) \setminus (U_2 \times V_2) = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)^c =$

$= (U_1 \times V_1) \cap ((X \setminus U_2) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus V_2)) =$

$= [(U_1 \times V_1) \cap ((X \setminus U_2) \times Y)] \cup [(U_1 \times V_1) \cap (X \times (Y \setminus V_2))] =$

$= (U_1 \cap (X \setminus U_2)) \times (V_1 \cap Y) \cup [(U_1 \cap X) \times (V_1 \cap (Y \setminus V_2))] =$

$= (U_1 \cap U_2^c) \times V_1 \cup (U_1 \times (V_1 \cap V_2^c))$

e per ipotesi ho che $x_1 \in U_1 \setminus U_2$ e $y_1 \in V_1 \Rightarrow (x_1, y_1) \in (U_1 \setminus U_2) \times V_1$

$$\Rightarrow (x_1, y_1) \in (U_1 \times V_1) \setminus (U_2 \times V_2)$$

utilizzo lo stesso procedimento per $(x_2, y_2) \in (U_2 \times V_2) \setminus (U_1 \times V_1)$

$$\Rightarrow X \times Y \text{ è } T_1.$$

□

alternativa:

Recall: Prop: $X \text{ è } T_1 \Leftrightarrow \forall x \in X, \{x\} \text{ è chiuso.}$

fisso $(x, y) \in X \times Y$, dimostro che $\{(x, y)\}$ è chiuso in $X \times Y$

$$X \times Y \setminus \{(x, y)\} = (X \times Y) \cap \{(x, y)\}^c = \underbrace{(X \setminus \{x\} \times Y)}_{\text{aperto perché } X \setminus \{x\} \text{ è aperto}} \cup \underbrace{(X \times Y \setminus \{y\})}_{\text{aperto perché } Y \setminus \{y\} \text{ è aperto}}$$

$$\Rightarrow X \times Y \setminus \{(x, y)\} \text{ è aperto} \Rightarrow \{(x, y)\} \text{ chiuso} \Rightarrow X \times Y \text{ è } T_1.$$

□

2) Dimostrare che se $X, Y \text{ è } T_2 \Rightarrow X \times Y \text{ è } T_2.$

risposta:

Def: $X \text{ è } T_2$ se $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

devo dimostrare che $X \times Y \text{ è } T_2$.

fisso $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ t.c. $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$ o

$$y_1 \neq y_2$$

1° caso: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ siccome $X \text{ è } T_2 \exists U_1, U_2 \subset X$ aperti t.c.

$$x_1 \in U_1, \quad x_2 \in U_2 \quad \text{e} \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Considero dunque $U_1 \times Y$ e $U_2 \times Y$ aperti di $X \times Y$. Essi sono quindi t.c.

$$(x_1, y_1) \in U_1 \times Y, \quad (x_2, y_2) \in U_2 \times Y \quad \text{e}$$

$$(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) = (U_1 \cap U_2) \times Y = \emptyset \times Y = \emptyset \quad \Rightarrow \text{fissati due pt.}$$

arbitrari ho esibito due aperti di $X \times Y$ che soddisfanno la def. di T_2

$$\Rightarrow X \times Y \text{ è } T_2.$$

2° caso: $y_1 \neq y_2 \Rightarrow$ in modo del tutto analogo al caso $x_1 \neq x_2$.

□

3) Dimostrare che se X, Y sono $T_3 \Rightarrow X \times Y$ è T_3 .

risposta:

utilizzo la caratterizzazione fatta a lezione:

Prop. Suppongo che X sia T_1 . X è $T_3 \Leftrightarrow$ ogni punto $x \in X$ ammette una base di intorni chiusi.

So che $X \times Y$ è T_1 per l'esercizio (1).

Devo far vedere che fissato un punto $(x, y) \in X \times Y$ questo ammette una base di intorni chiusi.

Fisso quindi $(x, y) \in X \times Y$. Siccome X è $T_3 \Rightarrow x$ ammette una

base di intorni chiusi $\{U_x^i\}_{i \in I}$. So inoltre che Y è $T_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y$ ha una base di intorni chiusi $\{V_y^j\}_{j \in J}$

Considero dunque gli insiemi $\{U_x^i \times V_y^j\}_{i \in I, j \in J}$.

Voglio verificare che sia una base di intorni chiusi di (x, y) .

• $(x, y) \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_y$, $x \in I$.

• $\mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_y$ è chiuso poiché prodotto di due chiusi, $x \in I$.

• controllo che sia una base di intorni del punto (x, y) :

fixo un intorno L di (x, y) . Per definizione di intorno di

un punto ho che $\exists A \subset X \times Y$ aperto di $X \times Y$ t.c.

$(x, y) \in A \subset L$. Posso supporre che A sia un aperto di

base (mi basta verificare le proprietà sugli aperti di base) $\Rightarrow$

$\Rightarrow A = A_1 \times A_2$, A_1 aperto in X , A_2 aperto in Y t.c. $x \in A_1, y \in A_2$

$\{ \mathcal{U}_x \}$ è base di intorni chiusi e A_1 intorno di ogni pto $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \bar{\mathcal{U}}_x$ tale che $x \in \bar{\mathcal{U}}_x \subset A_1$

$\{ \mathcal{V}_y \}$ base di intorni chiusi e A_2 intorno di ogni pto $\Rightarrow \exists \bar{\mathcal{V}}_y$ t.c.

$y \in \bar{\mathcal{V}}_y \subset A_2 \Rightarrow \bar{\mathcal{U}}_x \times \bar{\mathcal{V}}_y \in \{ \mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_y \}$, $(x, y) \in \bar{\mathcal{U}}_x \times \bar{\mathcal{V}}_y \subset A \subset L$

$\Rightarrow \{ \mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_y \}$ è base di intorni chiusi di (x, y) . $\square$

4) Estendere i 3 esercizi precedenti ai prodotti arbitrari:

i) Data una famiglia $\{ X_i \}_{i \in I}$ tale che X_i è T_1 $\forall i \Rightarrow$

$\Rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ è T_1 .

risposta:

utilizzo la definizione di spazio T_1 : X è T_1 se

$\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U \setminus V$ e $y \in V \setminus U$

un punto in $\prod_{i \in I} X_i$ è del tipo: $x = (x_i)_{i \in I}$ e ricordiamo che

gli aperti di base della topologia prodotto sono del tipo

$$\prod_{i \in I} U_i, \text{ con } U_i \subset X_i \text{ aperto } \forall i \in I \text{ e } \#\{i \in I : U_i \neq X_i\} < \infty.$$

Considero quindi $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ tali che

$$x \neq y \Rightarrow \exists j \in I \text{ tale che } x_j \neq y_j.$$

Siccome X_j è $T_1 \Rightarrow \{x_j\}$ e $\{y_j\}$ sono chiusi $\Rightarrow$

$$\Rightarrow X_j \setminus \{x_j\} \text{ aperto e } X_j \setminus \{y_j\} \text{ aperto e}$$

$X_j \setminus \{x_j\}$ contiene y_j ma non x_j e $X_j \setminus \{y_j\}$ contiene x_j ma

non $y_j \Rightarrow$ considero
$$V = \prod_{i \in I} U_i \text{ t.c. } U_i = \begin{cases} X_j \setminus \{x_j\}, & i=j \\ X_i, & i \neq j \end{cases}$$

$$\text{e } U = \prod_{i \in I} U_i \text{ t.c. } U_i = \begin{cases} X_j \setminus \{y_j\}, & i=j \\ X_i, & i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in U \setminus V \text{ e } y \in V \setminus U \Rightarrow \prod_{i \in I} X_i \text{ è } T_1.$$

□

(iii) Data una famiglia $\{X_i\}_{i \in I}$ tale che X_i è $T_2 \forall i \in I \Rightarrow$

$$\Rightarrow \prod_{i \in I} X_i \text{ è } T_2.$$

Risposta:

utilizzo la definizione di spazio T_2 : X è T_2 se $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists U, V \subset X \text{ aperti t.c. } x \in U, y \in V \text{ e } U \cap V = \emptyset.$$

Considero quindi $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$, $x \neq y \Rightarrow \exists j \in I$ t.c.

$$x_j \neq y_j \Rightarrow \text{siccome } X_j \text{ è } T_2 \Rightarrow \exists U_j, V_j \subset X_j \text{ aperti t.c.}$$

$$x_J \in U_J, y_J \in V_J \text{ e } U_J \cap V_J = \emptyset.$$

Considero quindi

$$U = \prod_{i \in I} U_i = \begin{cases} U_J, & J=i \\ X_i, & i \neq J \end{cases}$$

$$V = \prod_{i \in I} V_i = \begin{cases} V_J, & J=i \\ X_i, & i \neq J \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in U, y \in V \text{ e } U \cap V = \emptyset \Rightarrow \prod_{i \in I} X_i \text{ è } T_2.$$

□

(iii) Data una famiglia $\{X_i\}_{i \in I}$ t.c. $X_i \text{ è } T_3, \forall i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \prod_{i \in I} X_i \text{ è } T_3.$$

Risposta:

So che lo spazio è T_1 perché lo ho dimostrato in (i).

Utilizzo la caratterizzazione per cui uno spazio è T_3 se ogni suo punto $x \in X$ ammette una base di interi chiusi.

considero $x = (x_i)_{i \in I} \in X$, un intorno fondamentale di

x è della forma $U = \prod_{i \in I} U_i$, con $U_i \subseteq X_i$ aperto,

$U_i = X_i$ per tutti tranne un numero finito di indici, $x_i \in U_i, \forall i$.

Sia $F = \{i \in I : U_i \neq X_i\}$ finito. $X_i \text{ è } T_3, \forall i \Rightarrow \forall i \in F \exists$

intorno chiuso $C_i \subseteq U_i$ t.c. $x_i \in C_i$. Per $i \notin F$ pongo $C_i = X_i$.

Definisco quindi $C = \prod_{i \in I} C_i \subseteq U$.

verificare le proprietà.

□

5) piano di Sorgenfrey $\mathbb{R}^2_e := \mathbb{R}_e \times \mathbb{R}_e$, sia $L \subset \mathbb{R}^2_e$ retta di equazione $L: x+y=0$. Dimostrare che L è chiuso in $\mathbb{R}^2_e$.

Risposta:

voglio dimostrare che L risulta essere preimmagine di un chiuso tramite una funzione continua $\Rightarrow L$ chiuso.

Scrivo la seguente funzione:

$$\varphi: \mathbb{R}_e \times \mathbb{R}_e \longrightarrow \mathbb{R}_e$$

$$(x, y) \longmapsto x+y$$

$$\Rightarrow L = \varphi^{-1}(\{0\})$$

"

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}_e \times \mathbb{R}_e : x+y=0 \}$$

so che nella topologia di Sorgenfrey i singoletti risultano essere chiusi

poiché $\mathbb{R}_e \setminus \{x\} =]-\infty, x[\cup]x, +\infty[$ aperto perché unione di due aperti (v. foglio es. 2)

φ è continua dotando $\mathbb{R}^2_e$ della topologia prodotto perché

$$\varphi^{-1}(\underbrace{[a, b[}_{\text{verifico sugli aperti di base}}) = [0, a+b[\times [0, a+b[\quad \text{aperto nella topologia prodotto}$$

$$a-y \leq x < b-y$$

topologia indotta su L : aperti di $L \rightarrow \{(x, y) \in L \mid (x, y) \in U\}$, U aperto

in $\mathbb{R}^2_e$: $(x, y) \in L \Rightarrow (x, y) = (x, -x)$, n.p.g. U aperto di base $\Rightarrow$

$\Rightarrow L \cong \mathbb{R}$ dis ha la topologia discreta

□

6) Sia $f: X \rightarrow Y$ applicazione fra spazi topologici con Y di Hausdorff.

Dimostrare che se f è continua allora il grafico

$\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$ è chiuso. Il viceversa è vero?

Risposta:

Ricordo che se Y spazio è $T_2 \Leftrightarrow$ la diagonale $\Delta := \{(y, y) \mid y \in Y\}$ è chiusa in $Y \times Y$.

Scrivo $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$

Definisco la seguente funzione:

$$F: X \times Y \longrightarrow Y \times Y$$
$$(x, y) \longmapsto (f(x), y)$$

allora $\Gamma_f = F^{-1}(\Delta)$ ed ho che Δ è chiusa in $Y \times Y$ e

F funzione continua perché f continua.

$\hookrightarrow F = f \times \text{id}_Y : X \times Y \longrightarrow Y \times Y \Rightarrow$ è continua perché
 f continua, id_Y continua e per es. (1) foglio 4

$\Rightarrow \Gamma_f$ è chiuso perché contrainimmagine di un insieme chiuso tramite una funzione continua.

□

viceversa: È vero che se Γ_f è chiuso in $X \times Y \Rightarrow f$ è continua?

risposta: no, in generale il viceversa non è vero.

controesempio:

considero $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (dotando $\mathbb{R}$ della

topologia euclidea). Allora f non è continua in $x=0$ ma il suo grafico è chiuso in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\Gamma_f = F^{-1}(\{1\}) \quad \text{con} \quad F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto xy$$

F continua.

(7) Dimostrare che uno spazio quoziente $X/\sim$ è $T_1 \Leftrightarrow$ tutte le classi di equivalenza sono chiuse in X .

risposta:

$$X/\sim := \{ [x] : x \in X \}$$

topologia quoziente: $\tau_{\sim} := \{ V \subset X/\sim : \pi^{-1}(V) \subset X \text{ aperto} \}$

un insieme A in $(X/\sim, \tau_{\sim})$ è chiuso se $\pi^{-1}(A) \subset X$ chiuso

dunque:

$$X/\sim \text{ è } T_1 \Leftrightarrow \{ [x] \} \text{ è chiuso in } X/\sim, \forall [x] \in X/\sim \Leftrightarrow$$

$\uparrow$
 teorema
 lezione 8

$\swarrow$
 singolo visto $[x]$ come PUNTO di $X/\sim$

$$\Leftrightarrow \forall [x] \in X/\sim, \pi^{-1}(\{ [x] \}) = \{ y \in X \text{ t.c. } x \sim y \} = [x] \text{ è chiuso in } X$$

□

(8) Dimostrare che se $X/\sim$ è T_2 allora il grafico

$\Gamma_{\sim} := \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$ è chiuso in $X \times X$.

risposta:

considero la funzione $\tilde{\pi}: X \longrightarrow X/\sim$

$$x \longmapsto [x]$$

$\tilde{\pi}$ applicazione quoziente risulta essere continua per definizione di topologia quoziente

$$\Rightarrow \Gamma_{\tilde{\pi}} = \{(x, [x]) \in X \times X/\sim, x \in X\} \subset X \times X/\sim$$

grafico della applicazione quoziente è chiuso in $X \times X/\sim$ per

l'esercizio (6)

Definisco ora la funzione:

$$\text{id} \times \tilde{\pi}: X \times X \longrightarrow X \times X/\sim$$

$$(x, x) \longmapsto (x, [x])$$

$\text{id} \times \tilde{\pi}$ è continua poiché id e $\tilde{\pi}$ continue (v. foglio 4)

noto quindi che $\Gamma_{\sim} = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\} = (\text{id} \times \tilde{\pi})^{-1}(\Gamma_{\tilde{\pi}})$

$\Rightarrow \Gamma_{\sim}$ preimmagine tramite una funzione continua di un chiuso $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma_{\sim}$ chiuso in $X \times X$.

□

(9) Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza su X con grafico chiuso e l'applicazione quoziente $\pi: X \longrightarrow X/\sim$ è aperta allora $X/\sim$ è T_2 .

risposta:

• Relazione di equivalenza con grafico chiuso = $\sim$ tale che

$\Gamma_{\sim} = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$ chiuso in $X \times X$ (sottofamiglia di $X \times X$)

• $\pi: X \longrightarrow X/\sim$ aperta se $\forall V \subset X$ aperto ho che

$\pi(V) = V'$ è aperto in $X/\sim$

Utilizzo la proposizione che dice che X è $T_2 \Leftrightarrow$ la diagonale

Δ è chiusa in $X \times X \Rightarrow$ voglio provare che la diagonale

$\Delta_{\sim} = \{([x], [x]) \in X/\sim \times X/\sim\}$ è chiusa in $X/\sim \times X/\sim$

Definisco la seguente funzione:

$$\pi \times \pi: X \times X \longrightarrow X/\sim \times X/\sim$$

$$(x, y) \longmapsto ([x], [y])$$

questa mappa è aperta per l'esercizio (1) del foglio 4.

claim: $\pi \times \pi ((X \times X) \setminus \Gamma_{\sim}) = (X/\sim \times X/\sim) \setminus \Delta_{\sim}$

(se claim è vero $\Rightarrow (X/\sim \times X/\sim) \setminus \Delta_{\sim}$ è aperto perché

immagine di un aperto tramite una mappa aperta e dunque $\Delta_{\sim}$

è chiusa.

$$\text{Se } (x, y) \notin \Gamma_{\sim} \Rightarrow x \not\sim y \Rightarrow [x] \neq [y] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \times \pi ((X \times X) \setminus \Gamma_{\sim}) \subseteq (X/\sim \times X/\sim) \setminus \Delta_{\sim}.$$

Ora se $([x], [y]) \notin \Delta_\sim \Rightarrow [x] \neq [y] \Rightarrow x \not\sim y \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) \in (X \times X) \setminus T_\sim$

$\Rightarrow$ claim verificato

□

(10) Dimostrare che la retta con due origini $\mathbb{R} \div$ è T_1 ma non T_2 .

Risposta:

$\mathbb{R} \div = \underbrace{\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}}_{\sim}$, $\sim: x \sim y$ iff $x, y \neq 0$ e $x = y$

unione disgiunta!

$\mathbb{R} \div$ è T_1 : per l'esercizio (7) devo solo controllare che

tutte le classi di equivalenza sono chiuse in $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$

allora ho 2 casi:

1) se $x \neq 0 \Rightarrow [x] = \{x, y\}$ corrispondenti

2) per 0_x e 0_y ho che $[0_x] = \{0_x\}$, $[0_y] = \{0_y\}$

ho che in $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ e qui $\mathbb{R}$ risulta essere aperto e chiuso.

Considero dunque $\{0_x\}$ chiuso in $\mathbb{R}$ (singoletto).

topologia unione disgiunta: $W \subset X \sqcup Y$ aperto $\Leftrightarrow W \cap X$ e $W \cap Y$

aperti

considero $(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) \setminus \{0_x\} \Rightarrow (\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) \setminus \{0_x\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \{0_x\}$ aperto

$$(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) \setminus \{0_x\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \quad \text{aperto}$$

$\Rightarrow \{0_x\}$ chiuso in $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ e lo stesso per $\{0_y\}$

$\{x, y\}$ unione di singoletti $\Rightarrow$ chiuso

$\Rightarrow$ tutte le classi di equivalenza sono chiuse $\rightarrow \mathbb{R} \div$ è T_1 .

$\mathbb{R} \div$ non è T_2 :

idea: ogni intorno di 0_x interseca ogni intorno di 0_y

quindi non è Hausdorff

utilizzo la prop. della lezione 8 e vado a dimostrare che

$$\Delta_{\mathbb{R} \div} \subset \mathbb{R} \div \times \mathbb{R} \div \text{ non è chiusa.}$$

definisco le funzioni:

$$\begin{array}{c} \tilde{\pi} \circ i_1: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \div \\ \downarrow \text{immersione canonica} \\ x \longmapsto x \longmapsto [x] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \tilde{\pi} \circ i_2: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \div \\ \downarrow \text{immersione canonica} \\ y \longmapsto y \longmapsto [y] \end{array}$$

considero ora $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \div \times \mathbb{R} \div$, $\varphi(x) = (\tilde{\pi} \circ i_1(x), \tilde{\pi} \circ i_2(x))$

$$\Rightarrow \varphi(0) = (0_x, 0_y) \quad \text{e} \quad \varphi(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset \Delta_{\div}$$

Tuttavia $\varphi(0) \in \bar{\Delta}_{\div}$ poiché $\forall C \subset \mathbb{R} \div \times \mathbb{R} \div$ chiuso t.c.

$$\Delta_x \subset C, \quad \varphi^{-1}(C) \supseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{e siccome } \varphi \text{ continua } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi^{-1} \text{ chiuso} \Rightarrow \varphi^{-1}(C) = \mathbb{R} \Rightarrow 0 \in \varphi^{-1}(\bar{\Delta}_{\div}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (0x, 0y) \in \bar{\Delta} \div \Delta \div \Rightarrow$ la diagonale non è chiusa.

□

(11) Dimostrare che $\mathbb{R}_e$ è T_4 .

risposta:

$\mathbb{R}_e$ è T_4 poiché i singoletti sono chiusi.

$\forall A, B \subset \mathbb{R}_e$ chiusi disgiunti non vuoti ho che:

$$\forall a \in A \exists a' > a \text{ t.c. } [a, a'[\subset \mathbb{R}_e \setminus B$$

$$\forall b \in B \exists b' > b \text{ t.c. } [b, b'[\subset \mathbb{R}_e \setminus A$$

Considero quindi $U = \bigcup_{a \in A} [a, a'[$

$$V = \bigcup_{b \in B} [b, b'[$$

$$\Rightarrow A \subset U, B \subset V \text{ e } \underline{U \cap V = \emptyset}$$

$U \cap V = \emptyset$: p.a. $\exists x \in U \cap V \Rightarrow x \in \bigcup_{a \in A} [a, a'[\cap \bigcup_{b \in B} [b, b'[\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists a \in A, \exists b \in B \text{ t.c. } x \in \underbrace{([a, a'[)}_{\mathbb{R}_e \setminus B} \cap \underbrace{([b, b'[)}_{\mathbb{R}_e \setminus A}$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow a < b \text{ o } b < a$$

suppongo $a < b$ $\Rightarrow x \in [a, a'[\Rightarrow a \leq x < a'$
e $b' < a'$

$$x \in [b, b'[\Rightarrow b \leq x < b'$$

$$\Rightarrow a < b \leq x < b' < a' \Rightarrow b \in [a, a'[\text{ e } b \in B \quad \nearrow$$

suppongo $a < b$ e $a' < b' \Rightarrow a < b \leq x < a' \Rightarrow b \in [a, a'[\text{ e } b \in B \quad \searrow$

nello stesso modo per $b < a$.

□

(12) Dimostrare che X è $T_1 \Leftrightarrow$ ogni punto $x \in X$ è intersezione dei suoi interni.

Risposta:

($\Rightarrow$) sia $x \in X$ e considero $\bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} U$.

allora ho che $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} U$.

suppongo p.a. che $\exists y \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} U$, $y \neq x$.

$\Rightarrow y \in U$, $\forall U$ intorno di x ma X è $T_1 \Rightarrow$ siccome $y \neq x \exists$

U', V' aperti t.c. $x \in U' \cap V'$ e $y \in V' \setminus U' \Rightarrow U'$ è intorno di x

t.c. $y \notin U'$ $\downarrow$

($\Leftarrow$) Osserviamo $\forall x \in X$, $\bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} U = \{x\}$.

Sia $x \in X$. Allora $\forall y \neq x$, $y \notin \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} U \Rightarrow \exists U_y$ intorno di x t.c.

$y \notin U_y$. Per definizione di intorno $\exists V_y$ aperto tale che $y \in V_y \Rightarrow$

$\Rightarrow$ considerando $U = U_y$ intorno di x che esclude y

posso fare lo stesso ragionamento per y .

□