Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 6

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Supponiamo X spazio T_3 e $A \subset X$ chiuso. Dimostrare che A è intersezione di tutti gli aperti che lo contengono.

2) Dimostrare che I-numerabile e II-numerabile sono proprietà topologiche ereditarie.

3) Consideriamo l'inclusione canonica $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ (asse x). Dimostrare che $\mathbb{R}$ non ammette basi di intorni numerabili in $\mathbb{R}^2$.

4) Supponiamo $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ con $X_1, \ldots, X_n$ sottospazi compatti e $n \geq 1$. Dimostrare che X è compatto.

5) Supponiamo X di Hausdorff e $\{Y_i\}_{i \in I}$ famiglia di sottospazi compatti di X, con I insieme qualsiasi. Dimostrare che $Y = \bigcap_{i \in I} Y_i$ è compatto.

6) Dimostrare che ogni spazio cofinito è compatto.

7) Sia X localmente compatto e $Y \subset X$ sottospazio compatto. Dimostrare che Y ha un intorno compatto in X.

8) Sia X localmente compatto di Hausdorff e $Y \subset X$ sottospazio compatto. Dimostrare che Y ha una base di intorni compatti in X.

9) Sia X di Hausdorff e $A, B \subset X$ compatti disgiunti. Dimostrare che $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \varnothing$.

10) Sia X compatto metrizzabile. Dimostrare che X è II-numerabile.

11) Dimostrare che la retta di Sorgenfrey $\mathbb{R}_\ell$ non è localmente compatta.

Foglio 6:

(1) X spazio T_3 e $A \subset X$ chiuso. Dimostrare che A intersezione di tutti gli aperti che lo contengono.

risposta:

siccome X è uno spazio T_3 ho che fissato $x \in X \setminus A$, $\exists\, U, V \subset X$ aperti tali che $x \in U$, $A \subset V$ e $U \cap V = \phi$.

$$A = \bigcap_{\substack{U \supset A \\ U \text{ aperto}}} U$$

doppia inclusione:

($\subseteq$) okay (A è contenuto in tutti quindi è contenuto nell'intersezione)

($\supseteq$) sia $x \in \bigcap_{\substack{W \supset A \\ W \text{ aperto}}} W \Rightarrow x \in W$, $\forall\, W$ aperto tale che $A \subset W$

suppongo che p.a. che $x \notin A \Rightarrow$ siccome lo spazio X è T_3 ho che $\exists\, U, V \subset X$ t.c. $x \in U$, $A \subset V$ e $U \cap V = \phi$

ma V è un aperto che contiene $A \Rightarrow x \in V$ e $x \in U \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in U \cap V$ $\lightning$

$\Rightarrow x \in A$

$\square$

(2) I-numerabile e II-numerabile sono proprietà topologiche ereditarie

risposta: I-numerabile = ogni punto $x \in X$ ammette base di intorni numerabile

I - numerabile proprietà topologica:

sia X uno spazio I - numerabile e considero uno spazio Y tale che

$X \simeq Y \Rightarrow \exists f: X \longrightarrow Y$ omeomorfismo.

considero quindi un punto $y \in Y \Rightarrow \exists$ una base numerabile di

intorni in X per il punto $f^{-1}(y)$ $\quad \mathcal{J}_{f^{-1}(y)} = \{ J_{f^{-1}(y),n} \}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n$, considero $f(J_{f^{-1}(y),n}) \subset Y \Rightarrow$ considero quindi

$\mathcal{J}_y = \{ f(J_{f^{-1}(y),n}) \}_{n \in \mathbb{N}}$ insieme numerabile.

Voglio dimostrare che $\{ f(J_{f^{-1}(y),n}) \}_{n \in \mathbb{N}}$ è una base di intorni di

y:

1) $f(J_{f^{-1}(y),n})$ è intorno di y:

$J_{f^{-1}(y),n}$ è intorno di $f^{-1}(y) \Rightarrow \exists V_n \subset J_{f^{-1}(y),n}$ aperto tale che

$V_n \subset J_{f^{-1}(y),n}$.

f continua e aperta poiché f è un omeomorfismo $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{f(V_n)}_{\text{aperto in } Y} \subset f(J_{f^{-1}(y),n})$ e $y \in f(J_{f^{-1}(y),n}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(J_{f^{-1}(y),n})$ è intorno di y.

2) $\{ f(J_{f^{-1}(y),n}) \}_{n \in \mathbb{N}}$ base di intorni:

fisso $V \subset Y$ intorno di $y \Rightarrow \exists W \subset Y$ aperto tale che

$y \in W \subset V$. f omeomorfismo $\Rightarrow f^{-1}(W)$ aperto in X tale che

$f^{-1}(y) \in f^{-1}(W) \Rightarrow$ siccome $\{ J_{f^{-1}(y),n} \}$ base, ho che

$\exists J_{f^{-1}(y),\bar{n}}$ tale che $f^{-1}(y) \in J_{f^{-1}(y),\bar{n}} \subset f^{-1}(W) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y \in f(J_{f^{-1}(y), \bar{n}}) \subset W \subset V \quad \Rightarrow$ è base di intorni di y.

I - numerabile ereditaria:

Sia X spazio I - numerabile e sia $Y \subset X$.

fisso $y \in Y \subset X \Rightarrow y \in X \Rightarrow \exists$ base numerabile di intorni di y

$\mathcal{J}_y = \{ J_{y,n} \}_{n \in \mathbb{N}}$ in $X \Rightarrow$ Considero $\mathcal{J}'_y = \{ J_{y,n} \cap Y \}_{n \in \mathbb{N}}$ e

questa famiglia risulta essere una base numerabile di intorni di y in Y poiché Y è dotato della topologia di sottoinsieme (si verifica esplicitamente come prima) $\Rightarrow$ I - num. è ereditaria.

$\square$

II - numerabile = X ammette una base numerabile $\mathcal{B} = \{ B_n \}_{n \in \mathbb{N}}$

II - numerabile proprietà topologica:

Sia X uno spazio II - numerabile e sia Y uno spazio tale che $X \simeq Y \Rightarrow \exists f : X \to Y$ omeomorfismo. Tesi che $\exists \mathcal{B} = \{ B_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ base numerabile di X

claim: $\{ f(B_n) \}_{n \in \mathbb{N}}$ è una base numerabile di Y.

fisso U aperto in $Y \Rightarrow$ siccome f è un omeomorfismo,

$f^{-1}(U)$ aperto in $X \Rightarrow$ posso scrivere $f^{-1}(U) = \bigcup_{n \in I} B_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad U = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n\in I} f(B_n)$ per qualche sottoinsieme I di $\mathbb{N}$

identità insiemistica

$\Rightarrow \{f(B_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ base per la topologia di Y

$\{f(B_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ numerabile perché è immagine di una base numerabile sotto una funzione $n \longmapsto f(B_n)$

$\Rightarrow$ è una proprietà topologica

II - numerabile è ereditaria:

Sia X uno spazio topologico II - numerabile e sia $Y \subset X$.

Considero la base $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di X $\Rightarrow$ dotando Y della topologia di sottoinsieme ho che $\mathcal{B}' = \{B_n \cap Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base per Y:

un aperto nella topologia di Y è $V = U \cap Y$, U aperto in X

$\Rightarrow V = \bigcup_{n\in I} B_n \cap Y = \bigcup_{n\in I} (B_n \cap Y)$

$\mathcal{B}$ base di X

$\Rightarrow$ II - numerabile è ereditaria.

$\square$

(3) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ (asse x). Dimostrare che $\mathbb{R}$ non ammette basi di intorni numerabili in $\mathbb{R}^2$.

Risposta:

• PA suppongo che $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ sistema fondamentale di intorni di $\mathbb{R}$. Posso supporre che siano decrescenti ossia $V_{n+1} \subseteq V_n$ e V_n aperto, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall k \in \mathbb{Z}$, definisco $\alpha_{n,k} := \sup\{t \geq 0 \text{ t.c. } [k, k+1] \times [0,t] \subseteq V_n\} > 0$.

infatti se ~~α~~ $\alpha_{n,k} = 0 \Rightarrow \forall l \in \mathbb{N} \; \exists (x_l, y_l) \in [k,k+1] \times [0, 1/l] \setminus V_n \subseteq$
$\subseteq \mathbb{R}^2 \setminus V_n$. $\Rightarrow \exists ((x_m, y_m))_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus V_n$ tale che

$y_m \to 0$ e $k \leq x_m \leq k+1$, $\forall m \in \mathbb{N}$

ho che $[k, k+1]$ compatto in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ ~~posso~~ esiste una sottosuccessione convergente per cui posso supporre che $x_m \to \bar{x} \in [k, k+1]$

$\Rightarrow (x_m, y_m) \longrightarrow (\bar{x}, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus V_n$

poiché $\mathbb{R}^2 \setminus V_n$ è chiuso.

ma assurdo poiché $(\bar{x}, 0) \in \mathbb{R} \subseteq V_n$.

• considero $U \subseteq \mathbb{R}^2$ definito così:

Sia $\beta_n = \dfrac{\sup\{t \geq 0 : [3n, 3n+1] \times [0,t] \subseteq V_n\}}{2} > 0$

$\Rightarrow U \cap ([3n, 3n+1] \times \mathbb{R}) = [3n, 3n+1] \times [0, \beta_n]$

mentre U coincide con $\mathbb{R}^2$ su tutti gli altri punti così (?)

$$U = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [3n, 3n+1] \times [0, \beta_n]\right) \cup \left(\underbrace{(-\infty, 3) \times \mathbb{R}}_{(-\infty,0) \times \mathbb{R}}\right) \cup$$

$$\cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (3n+1, 3n+3) \times \mathbb{R}\right)$$

U intorno di $\mathbb{R}$.

ma $\nexists\, n \in \mathbb{N} : V_n \subseteq U$:

se $\exists V_n \subseteq U \Rightarrow$ avrei $\left(3n, \frac{3}{2}\beta_n\right) \notin U \to \left(3n, \frac{3}{2}\beta_n\right) \notin V_n$

ma è falso poiché $\left(3n, \frac{3}{2}\beta_n\right) \in V_n$ per def. di β_n. □

(4) Supponiamo che $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ con $X_1, \ldots, X_n$ sottospazi compatti e $n \geq 1$. Dimostrare che X è compatto.

risposta:

considero un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di X ossia $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Dato che $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n \Rightarrow \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ risulta essere un ricoprimento aperto anche di ognuno degli X_i, $i = 1, \ldots, n$.

Allora ho che:

- $\{U_\alpha\}$ ricoprimento aperto di X_1 e X_1 compatto $\Rightarrow$

$$\Rightarrow X_1 = \bigcup_{i=1}^{m_1} U_{\alpha_{1,i}}$$

- $\{U_\alpha\}$ ricoprimento aperto di X_2 e X_2 compatto $\Rightarrow$

$$\Rightarrow X_2 = \bigcup_{i=1}^{m_2} U_{\alpha_{2,i}}$$

$\vdots$

- $\{U_\alpha\}$ ricoprimento aperto di X_n e X_n compatto $\Rightarrow$

$$\Rightarrow X_n = \bigcup_{i=1}^{m_n} U_{\alpha_{n,i}}$$

$$\Rightarrow X = X_1 \cup \ldots \cup X_n = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{m_1} U_{\alpha_{1,i}} \cup \bigcup_{i=1}^{m_2} U_{\alpha_{2,i}} \cup \ldots \cup \bigcup_{i=1}^{m_n} U_{\alpha_{n,i}}}_{\text{ricoprimento finito di } X \text{ perché unione finita di unioni finite}}$$

$\Rightarrow X$ è compatto.

$\square$

(5) Supponiamo che X è di Hausdorff e $\{Y_i\}_{i\in I}$ famiglia di sottospazi compatti di X con I insieme qualunque.

Dimostrare che $Y = \bigcap_{i\in I} Y_i$ è compatto.

risposta:

Noto che Y_i è un compatto in uno spazio di Hausdorff $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Y_i è chiuso in X.

↑
Teorema

Voglio utilizzare la proposizione che dice che se ho un sottospazio chiuso di un insieme compatto $\Rightarrow$ è compatto $\Rightarrow$ voglio trovare un compatto che contiene $\bigcap_{i\in I} Y_i$.

Considero quindi $Y_{\bar{i}}$ tale che $\bar{i} \in I$.

Allora ho che $\bigcap_{i\in I} Y_i \subset Y_{\bar{i}}$ e $Y_{\bar{i}}$ è compatto.

Devo quindi controllare se $\bigcap_{i\in I} Y_i$ è chiuso in $Y_{\bar{i}}$.

$Y_{\bar{i}}$ è dotato della topologia di sottospazio di X ossia un aperto in $Y_{\bar{i}}$ è del tipo $V_{\bar{i}} = U \cap Y_{\bar{i}}$, con U aperto in X.

$$\bigcap_{i\in I} Y_i = Y_{\bar{i}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{i\neq \bar{i}} Y_i \right)}$$

chiuso in X poiché Y_i chiuso in X $\Rightarrow$ intersezione arbitraria di chiusi è chiusa in X

$\Rightarrow$ $\bigcap_{i\in I} Y_i$ è chiuso in $Y_{\bar{i}}$ $\Rightarrow$ $\bigcap_{i\in I} Y_i$ è compatto in $Y_{\bar{i}}$.

↑
Teorema

(*) dimostrare che se $\bigcap Y_i$ cmpt in $Y_{\bar{i}}$ $\Rightarrow$ $\bigcap Y_i$ cmpt in X

Voglio ora dimostrare che se $\bigcap_{i \in I} Y_i$ compatto in $Y_{\bar{i}}$, $Y_{\bar{i}}$ è compatto $\Rightarrow$ $\bigcap_{i \in I} Y_i$ è compatto in X.

Considero un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di $Y_{\bar{i}}$ in X (U_α aperto in X, $\forall \alpha \in A$).

Allora ho che $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è ricoprimento aperto di $\bigcap_{i \in I} Y_i$ in X

e $\{U_\alpha \cap Y_{\bar{i}}\}_{\alpha \in A}$ è ricoprimento aperto di $\bigcap_{i \in I} Y_i$ in $Y_{\bar{i}}$.

- $\bigcap_{i \in I} Y_i$ è compatto in $Y_{\bar{i}}$ $\Rightarrow$ $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in A$ t.c.

  $\bigcup_{k=1}^{m} U_{\alpha_k} \cap Y_{\bar{i}} = \bigcap_{i \in I} Y_i$

- considero quindi $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^{m}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\bigcap_{i \in I} Y_i = \bigcup_{k=1}^{m} U_{\alpha_k}$ sottoric. finito in X

$\Rightarrow$ $\bigcap_{i \in I} Y_i$ è compatto in X.

$\square$

(6) Dimostrare che ogni spazio cofinito è compatto.

risposta:

Sia (X, τ_{cof}) spazio cofinito, ossia gli aperti di (X, τ_{cof}) sono $\mathcal{U} \subset X$ tali che $X \setminus \mathcal{U}$ è un insieme finito $(\cup \{\emptyset\})$.

Considero quindi $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di X ossia $X = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$ e $\mathcal{U}_\alpha$ è tale che $X \setminus \mathcal{U}_\alpha$ è insieme finito.

idea: $\forall \alpha$, $X \setminus \mathcal{U}_\alpha$ è un sottoinsieme finito $\Rightarrow$ basta aggiungere un numero finito di punti (e di aperti) per raggiungere tutto X.

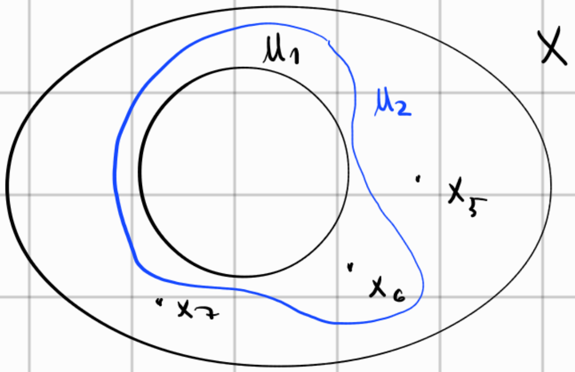
fisso $\alpha_1 \in A \Rightarrow \#\{X \setminus \mathcal{U}_{\alpha_1}\} < \infty$.

Considero quindi $\alpha_2 \in A \Rightarrow$ • se $X \setminus \mathcal{U}_{\alpha_2} \supseteq X \setminus \mathcal{U}_{\alpha_1} \Rightarrow$ scarto $\mathcal{U}_{\alpha_2}$

• se $X \setminus \mathcal{U}_{\alpha_2} \subset X \setminus \mathcal{U}_{\alpha_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x \in (X \setminus \mathcal{U}_{\alpha_1}) \setminus (X \setminus \mathcal{U}_{\alpha_2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ tengo $\mathcal{U}_{\alpha_2}$



$\Rightarrow$ continuo per un numero finito di passi finché

$(X \setminus \mathcal{U}_{\alpha_{n-1}}) \setminus (X \setminus \mathcal{U}_{\alpha_n}) = \emptyset$ $\quad$ ($\exists n$ finito perché $X \setminus \mathcal{U}_\alpha$ finito $\forall \alpha$)

$\Rightarrow X = \bigcup_{i=1}^{\tilde{n}} \mathcal{U}_{\alpha_i}$ ricoprimento finito.

(7) Sia X localmente compatto e $Y \subset X$ sottospazio compatto. Dimostrare che Y ha un intorno compatto in X.

risposta:

Recall: X si dice localmente compatto se $\forall x \in X$ $\exists J \subset X$ intorno compatto di x in X.

Devo dimostrare che $\exists U \subset X$ aperto tale che $Y \subset U$ e U è compatto.

(*) Se X è localmente compatto, $Y \subset X$ compatto $\Rightarrow$ Y è localmente compatto $\Rightarrow$ $\forall y \in Y$ $\exists J_y \subset Y$ intorno compatto di y in Y.

Considero quindi $\bigcup_{y \in Y} J_y$ è aperto ed è tale che $Y \subset \bigcup_{y \in Y} J_y$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ è un ricoprimento aperto di Y $\Rightarrow$ $\exists$ un sottoricoprimento finito poiché Y compatto $\Rightarrow$ $\exists \{y_1, \dots, y_n\}$ t.c. $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} J_{y_i}$ e unione finita di spazi compatti è compatta per esercizio (4) (ed è anche aperta perché unione finita di aperti) $\Rightarrow$ $U = \bigcup_{i=1}^{n} J_{y,i}$ intorno compatto di Y.

(*) dim: X localmente compatto $\Rightarrow$ $\forall y \in Y$ $\exists$ intorno compatto $U \subset X$ di y. $Y \subseteq X$ $\Rightarrow$ Considero $U \cap Y$ $\Rightarrow$ è aperto in Y e contiene y.

Devo provare che $U \cap Y$ è compatto in Y ma so che U compatto in X $\Rightarrow$ $\exists$ $U_1, \dots, U_n$ aperti t.c. $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ $\Rightarrow$ posso scrivere

$U \cap Y = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \cap Y = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap Y)$ compatto in Y $\Rightarrow$ $U \cap Y$ intorno compatto di y. $\square$

(8) Sia X localmente compatto di Hausdorff e $Y \subset X$ sottospazio compatto. Dimostrare che Y ha base di intorni compatti in X.

risposta:

Y ha una base di intorni compatti in X se $\forall U$ intorno aperto di Y in X $\exists W$ intorno compatto di Y in X t.c. $W \subset U$.

Considero quindi un intorno aperto U di Y in X.

X è localmente compatto e di Hausdorff $\Rightarrow$ $\forall x \in X$, $\exists J_x$ base di intorni compatti $\Rightarrow$ $\forall y \in Y$, $\exists J_y$ base di intorni cmpt in X $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ fissato $y \in Y$, $\exists J_y$ intorno compatto in X di y e posso sceglierlo abbastanza piccolo in modo tale che $J_y \subset U$.

Considero quindi $\bigcup_{y \in Y} J_y$, esso è aperto ed è tale che

$Y \subset \bigcup_{y \in Y} J_y$ $\Rightarrow$ è un ricoprimento aperto di Y $\Rightarrow$ per la compattezza di Y, $\exists \{y_1, \dots, y_n\} \in Y$ t.c. $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} J_{y_i}$ e ho che

$\bigcup_{i=1}^{n} J_{y_i} \subset U$ ed è compatto poiché unione finita di compatti in X $\Rightarrow$ $W = \bigcup_{i=1}^{n} J_{y_i}$.

$\square$

(9) Sia X di Hausdorff e $A, B \subset X$ compatti disgiunti. Dimostrare che $\exists U, V \subset X$ aperti t.c. $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

risposta:

X è di Hausdorff e A e B sono compatti in uno spazio di Hausdorff $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A e B sono chiusi in X.

$A \cap B = \phi \Rightarrow B \subset X \setminus A$.

fisso quindi $x \in B \subset X \setminus A \Rightarrow$ poiché X è di Hausdorff e A compatto

$\Rightarrow \exists\, U_x, W_x \subset X$ aperti tali che $x \in U_x$, $A \subset W_x$ e $U_x \cap W_x = \phi$

$\Rightarrow$ basta considerare $U = \bigcup_{x \in B} U_x$ e $V = \bigcup_{x \in B} W_x \Rightarrow$

$\Rightarrow B \subset U$, $A \subset V$ e $U \cap V = \phi$.

$\square$

(10) Sia X compatto metrizzabile. Dimostrare che X è II - numerabile.

risposta:

X metrizzabile $\Rightarrow \exists\, d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ metrica tale che la topologia indotta da d coincide con quella di X $\Rightarrow$ una base per la topologia è data dalle palle aperte $B_d(x, \varepsilon) = \{ y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon \}$, $\varepsilon > 0$, $x \in X$.

Ho che fissato $n > 0$, l'insieme $\{ B_d(x, 1/n) \text{ t.c. } x \in X \}$ è un ricoprimento aperto di X $\Rightarrow$ per la compattezza di X ho che $\exists \{ x_{n,1}, \_\_\_, x_{n,m_n} \} \in X$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^{m_n} B(x_{n,i}, 1/n)$

claim: $\mathcal{B} = \bigcup_{n>0} \{ B(x_{n,i}, 1/n) : i = 1, \_, m_n \}$ è una base numerabile per X.

dim: $\mathcal{B}$ è numerabile per costruzione. Provo che è una base per la topologia di X.

fisso $x \in X$, $\varepsilon > 0$ e dunque $B(x, \varepsilon)$ aperto.

$\Rightarrow$ prendo n tale che $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow$ $x \in B(x_{n,i}, 1/n)$ $(\exists i)$

$\Rightarrow$ se $y \in B(x_{n,i}, 1/n)$ ho che

$$d(x,y) \leq d(x_{n,i}, x) + d(x_{n,i}, y) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $B(x_{n,i}, 1/n) \subseteq B(x, \varepsilon)$

$\Rightarrow$ è una base.

$\square$

(11) Dimostrare che la retta di Sorgenfrey non è localmente compatta.

risposta:

Recall: retta di Sorgenfrey dotata della topologia con aperti gli intervalli aperti a sinistra ossia $[a, b)$ con $a < b$.

Def: X è localmente compatto se $\forall x \in X$ $\exists U$ intorno di x t.c. $\overline{U}$ è compatto in X.

Fisso $x \in \mathbb{R}_e$ e considero un intorno aperto U di x. Posso quindi supporre che $U = [a, b)$.

Voglio far vedere che $\overline{[a,b)} = [a,b]$ non è compatto in $\mathbb{R}_e$.

Considero $\mathcal{U} = \{ [a, b - 1/n) : n \in \mathbb{N} \} \cup \{ [b, b+1) \}$

$\Rightarrow$ questa è una famiglia di aperti in $\mathbb{R}_e$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a, b - 1/n) \cup [b, b+1) \supset [a, b]$$

ma non posso estrarne un sottoricoprimento finito:

$[a, b-1/n_1), [a, b-1/n_2), \dots, [a, b-1/n_k), [b, b+1)$

e pongo $N = \max\{n_1, \dots, n_k\} < +\infty$.

$\Rightarrow$ il punto $x = b - \frac{1}{3N}$ non è coperto dalla collezione.

$\square$